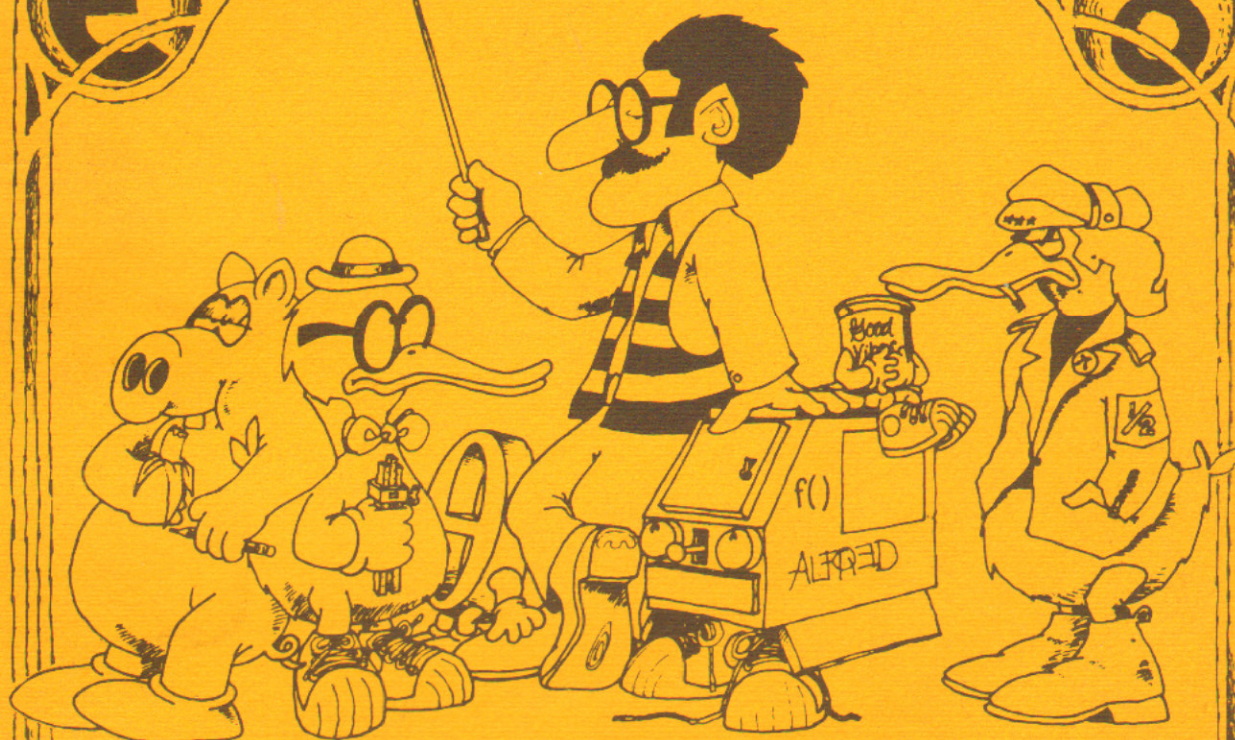


MANUALE DI CALCOLO DIFFERENZIALE

DEL PROFESSOR MC SQUARED

DI
SWANN & JOHNSON



BCD STRUMENTI DI INFORMAZIONE
E DIDATTICA POPOLARE

EDIZIONE SPERIMENTALE

Questa è l'edizione sperimentale di un libro in evoluzione ed è il risultato dei nostri sforzi per inventare un modo divertente di studiare il calcolo differenziale. Crediamo che vi possa aiutare ad iniziare bene, sia che stiate studiando per conto vostro sia che stiate seguendo un regolare corso di analisi matematica con uno dei molti manuali esistenti.

Il primo capitolo comincia con un ripasso dell'algebra e delle disequaglianze; volendolo si può saltare, ma conviene leggere il paragrafo 1.4 sulle funzioni prima di passare al secondo capitolo. Il capitolo verte interamente sui limiti, un concetto molto difficile da afferrare, ma che forse è il più importante di tutto il calcolo differenziale.

Con lo stesso spirito e impostazione utilizzati per i limiti e le derivate è in preparazione un secondo volume che può essere richiesto direttamente utilizzando l'apposito modulo che si trova stampato alla fine di questo libro.

Titolo originale: *Prof. E. Mc. Squared original, fantastic and highly edifying Calculus Primer.*

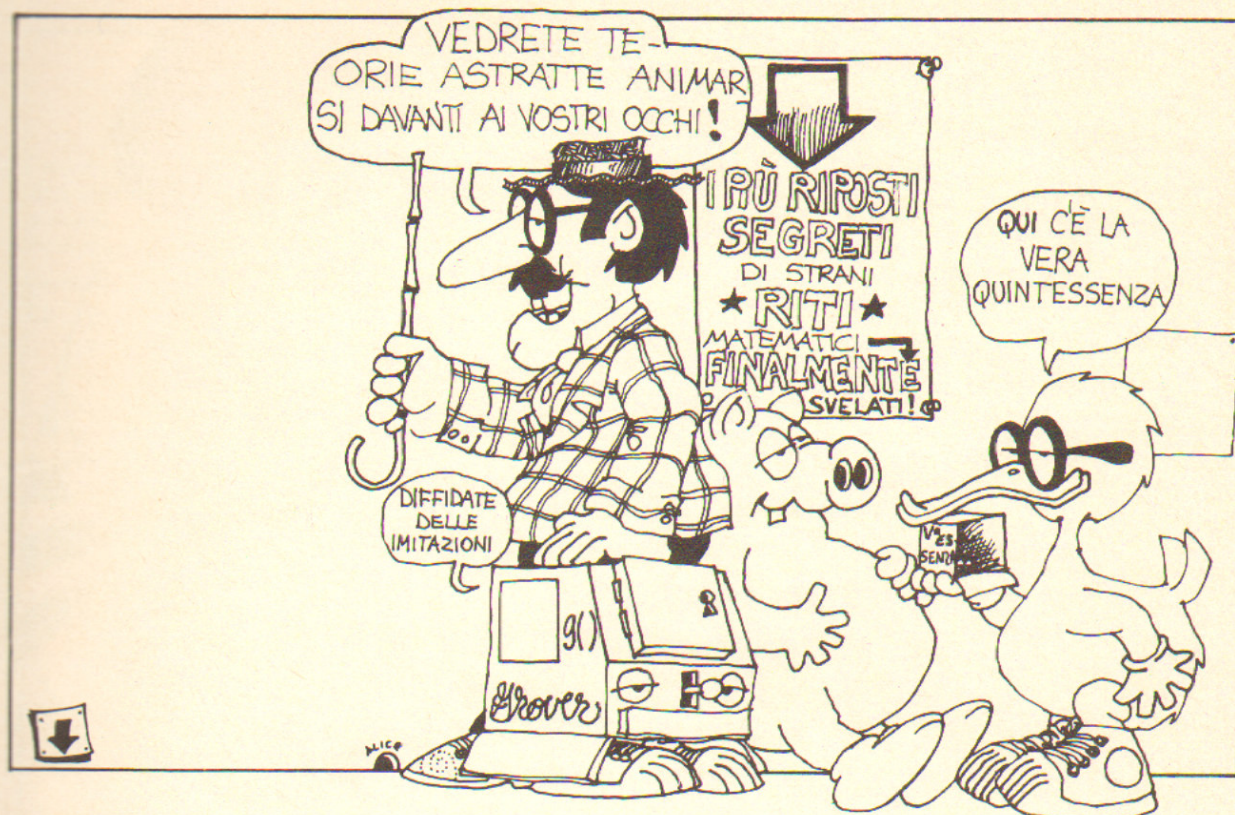
Traduzione di: Giovanni Lipari

Adattamenti grafici di: Francesca Piovella

Copyright © 1975 William Kaufmann, Inc. One First Street, Los Altos, California.

Tutti i diritti riservati.

Copyright © 1976 BCD s.r.l. Via Matteo Bandello, 16, 20123 Milano.



ATTENZIONE !

QUESTO E' UN VERO MANUALE DI CALCOLO DIFFERENZIALE,

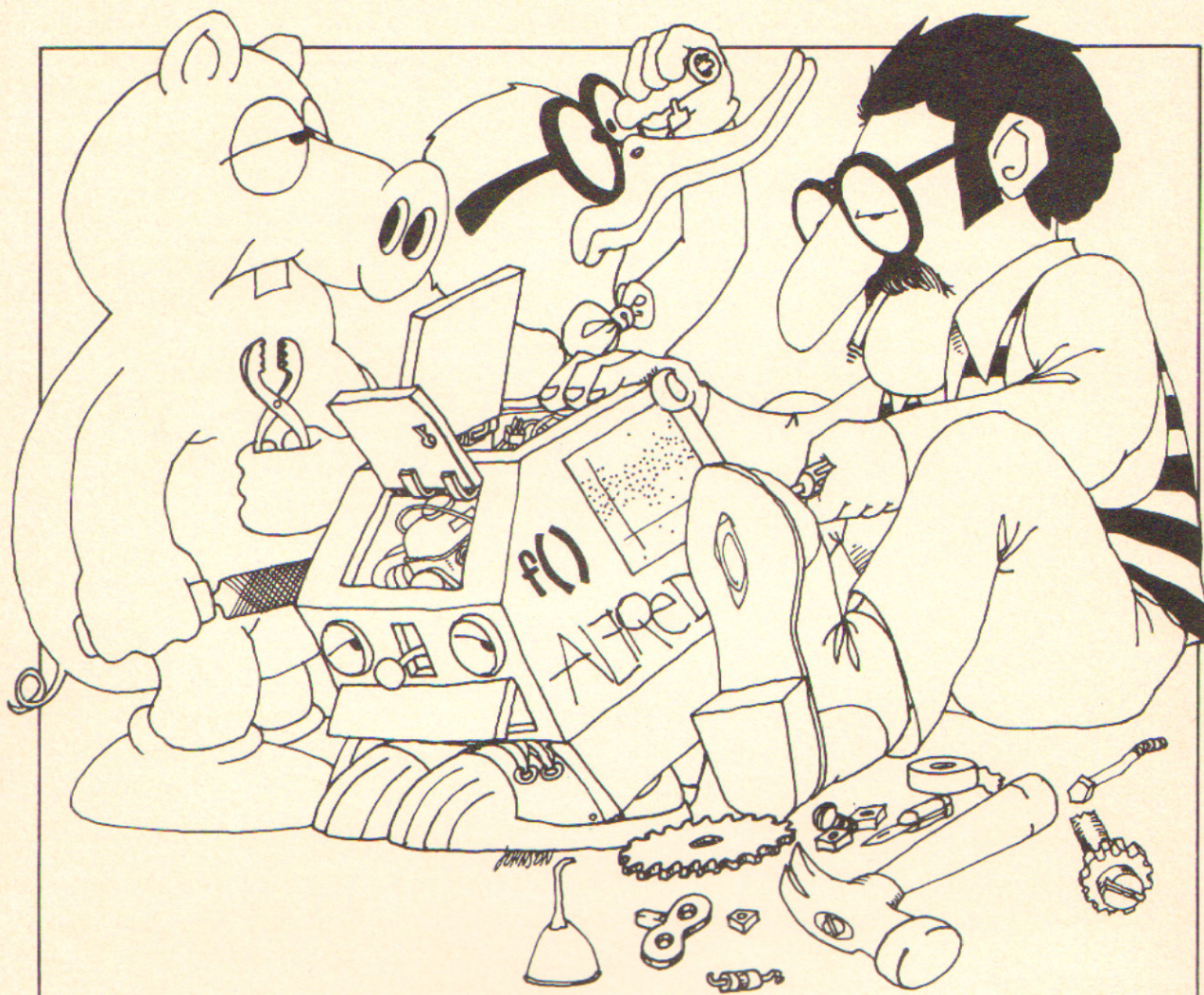
scritto soprattutto per quelli che ricordano un po' di algebra delle scuole superiori e sono curiosi di vedere lo strano modo in cui i matematici hanno costruito il calcolo differenziale. Un altro vantaggio è che chiunque abbia sopportato fino in fondo lo strano corso del Prof. McSquared avrà acquisito una buona base per affrontare un normale libro di analisi matematica !

La nostra idea originale era che, trovando un personaggio per ogni concetto matematico del calcolo differenziale e facendoli recitare, ne sarebbe risultato un libro molto più vivo e interessante dei soliti manuali. Ma per strada i personaggi hanno assunto una vitalità molto maggiore di quella che ci aspettavamo e qualche volta sembrano andarsene per conto loro. Così, se vi fanno perdere il filo, tornate indietro e rileggete quello che avete già fatto cercando di fare gli esercizi - abbiamo lasciato lo spazio per svolgerli sul libro e le risposte sono alla fine.

Ringraziamo Pat Brewer, Loring Woodman, Sam Picone e molti studenti per il loro aiuto.

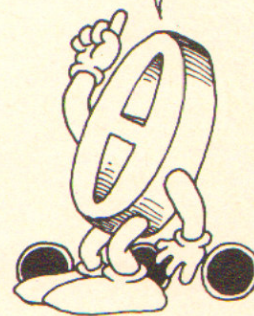
Speriamo che il libro vi piacerà

Gli autori



DOVE VIENE
SVELATO IL MISTERO
DEL CALCOLO
DIFFERENZIALE!

INDICE



Introduzione - nella quale vengono svelati altri aspetti del mistero del calcolo differenziale.

Presentazione dei personaggi.

Capitolo I. Funzioni.

I.2 Teoria degli insiemi - unione, intersezioni, ecc.

Diagrammi di Venn.

I.3 Insiemi di numeri con la partecipazione di $\{ \}$, $[]$, $()$ e « x ».

Moltiplicazioni di insiemi di numeri per una costante - accorciamenti, restringimenti e «ribaltamenti».

Valori assoluti.

Descrizione di intervalli numerici usando i valori assoluti.

I.4 Funzioni.

Regole per le funzioni.

Macchine per funzioni.

Regole più precise per le funzioni.

Costruzione di grafici per funzioni.

Etichettatura dei punti.

Formule per le funzioni.

Le famose funzioni che hanno per grafico una retta.

I.5 Rette.

Coefficienti angolari.

La formula generale punto - coefficiente angolare.

Coefficiente angolare di una retta noti due dei suoi punti.

I.6 Altre funzioni che hanno per grafico parabole e cubiche.

Parabole.

Cubiche.

Capitolo II. Limiti.

II.1 Il problema della regolarità.

II.2 Macchine per limiti.

II.3 ϵ e δ .

Dimostrazione della regolarità del grafico di una funzione.

Definizione di continuità.

II.4 Calcoli segreti: come trovare una formula per δ .

RISPOSTE !

6

8

10

11

13

16

19

24

26

28

29

29

33

35

38

41

43

46

48

52

57

61

61

65

68

69

72

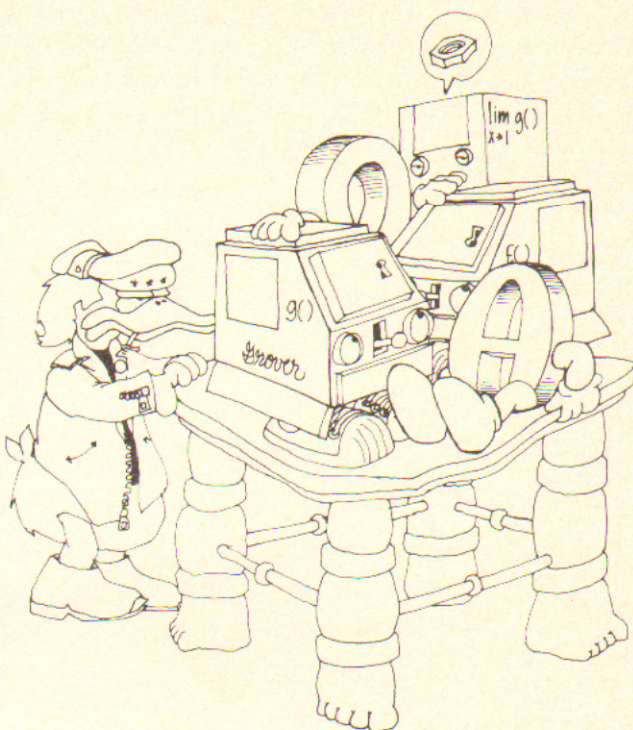
87

93

94

98

105



SECONDO VOLUME (in preparazione - vedi il modulo di richiesta alla fine del libro).

ARGOMENTI

Altri calcoli segreti sulle parabole.

Una funzione che non è continua.

Continuità in un intervallo.

Cosa succede quando in un grafico manca un punto.

Unicità di un punto limite: dimostrazione di un teorema autentico.

Capitolo III. Derivate.

Il problema del coefficiente angolare di una tangente.

Costruzione della funzione della tangente.

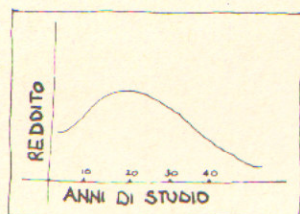
Leggi relative al «rito dei tre passi» per le derivate.

Definizione delle derivate.

Derivate generali delle polinomiali.

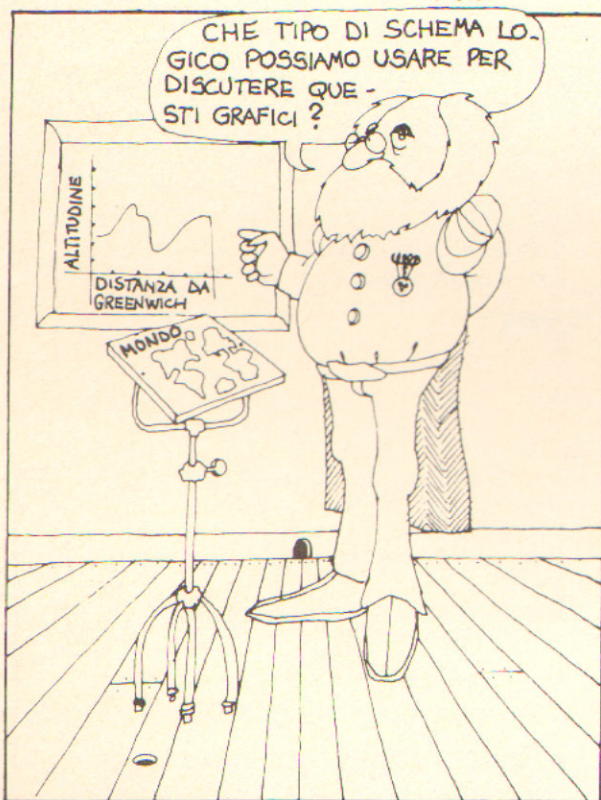
Velocità.

Il calcolo infinitesimale consiste nello studio RIGOROSO del tipo di relazioni che possono essere rappresentate in un grafico.



Studiando tali relazioni i matematici cercano di rispondere a queste domande:

La PRIMA domanda è...



I disegni non sono abbastanza precisi e i calcolatori con loro non possono operare.

Supposto che si possa rispondere in modo coerente alla prima domanda, la SECONDA domanda è...

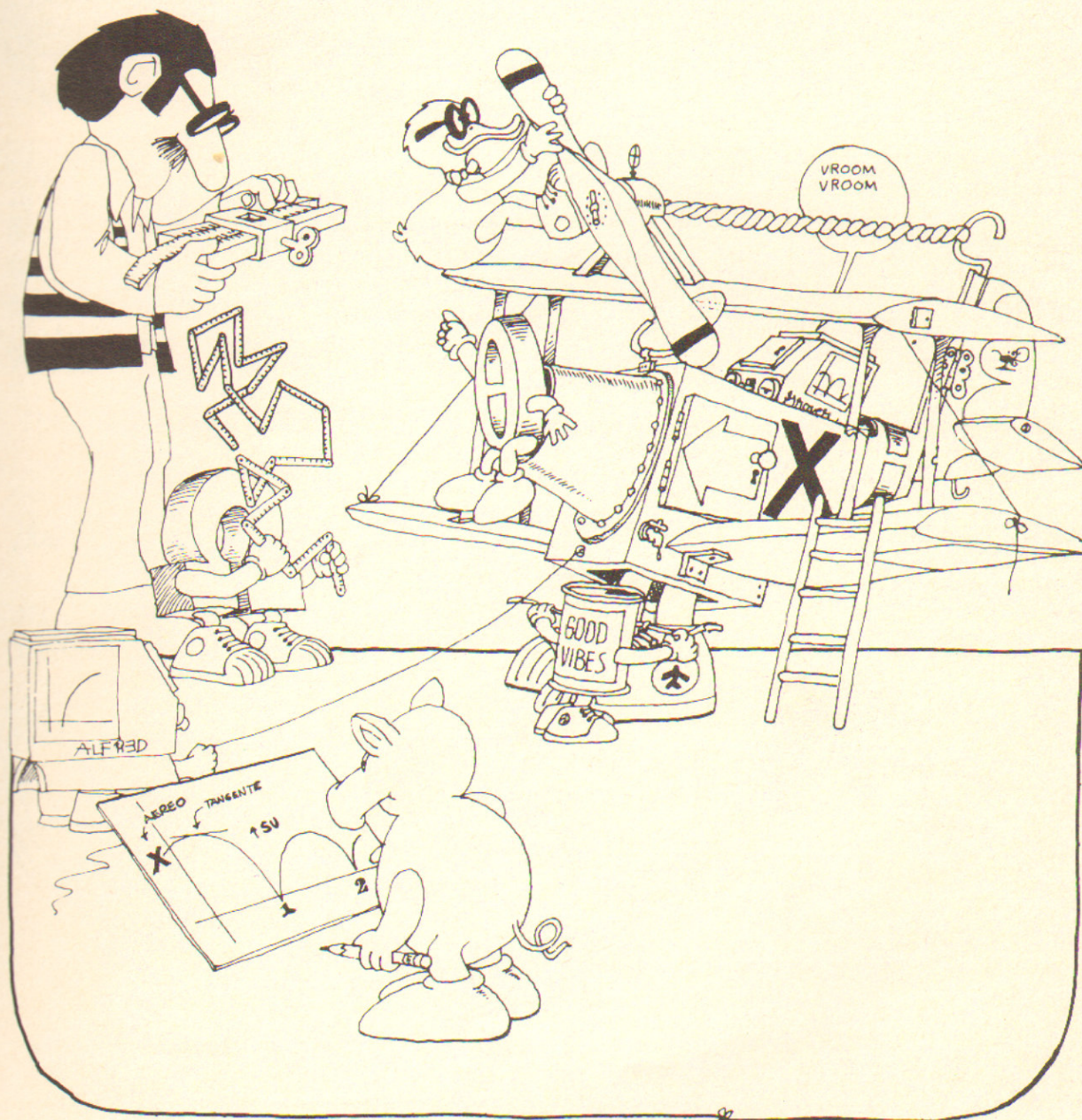


I matematici per anni si scervellarono su questo problema e infine riuscirono a trovare una risposta convincente, anche se un po' complessa, che diede modo di trattare anche la TERZA domanda...



Le risposte a queste tre domande costituirono la base di quello che viene chiamato "Calcolo Differenziale", e queste risposte erano proprio quello di cui i mate-

matici avevano bisogno per parlare di velocità, gravità, etc., dando così inizio all'avventura della scienza moderna.



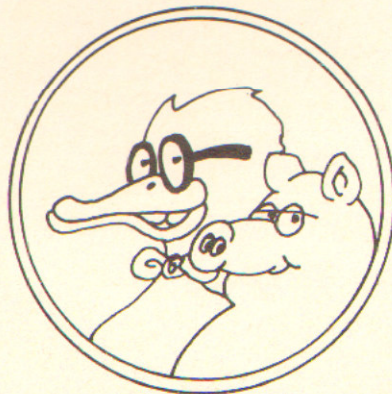
ALLA GUIDA DI QUESTO VIAGGIO ATTRAVERSO LO STRANO MONDO



E' IL PROF. E.
MCSQUARED,

ACCOMPAGNATO DA
R.D. & PIGGY.

THETA & OMEGA

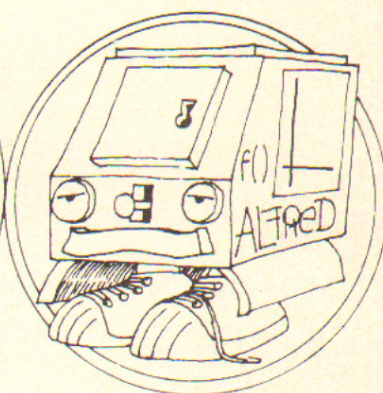
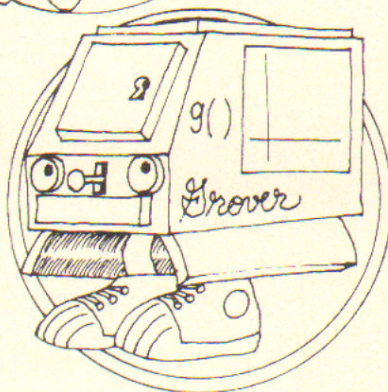


LUNGO
LA LORO STRADA INCONTRERANNO

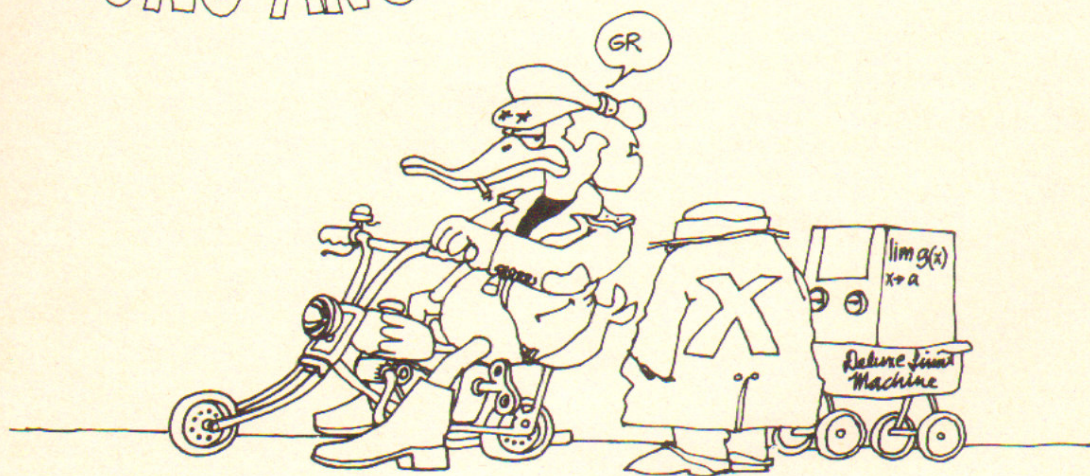
GOOD VIBES
(PER DIVERTIRVI
UN PO'),



GROVER
E IL SUO POSSENTE
FRATELLO ALFRED,



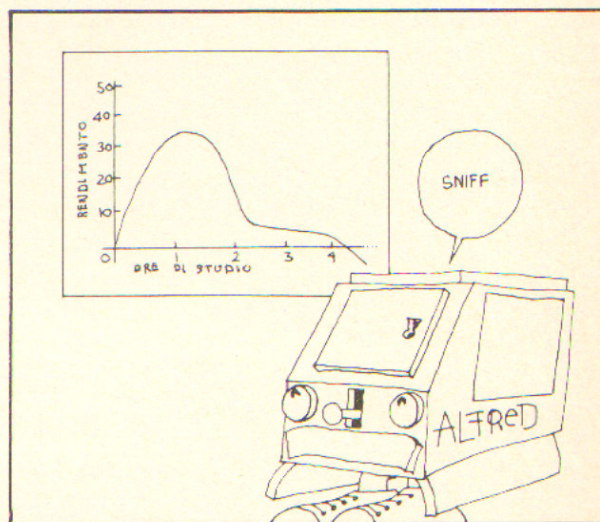
E ALTRI PERSONAGGI IN RUOLI CHE
DEVONO ANCORA ESSERE SVELATI.



CAPITOLO I: FUNZIONI

11

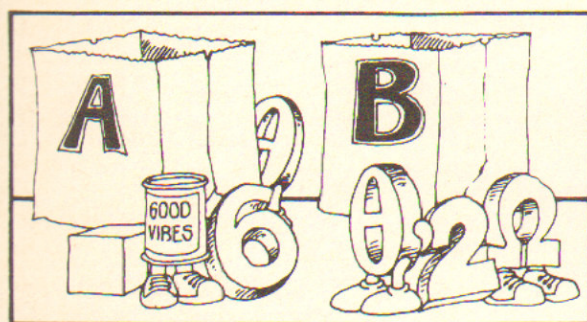
Per prima cosa i matematici inventarono un modo logico per parlare del tipo di relazioni che possono essere rappresentate in un grafico.



L'idea base è che si abbiano due collezioni di elementi come ore e voti e che vi sia qualche tipo di corrispondenza tra di loro. Così, per iniziare, abbiamo bisogno di strumenti in grado di trattare collezioni di elementi. Possiamo fare collezioni di
QUALUNQUE COSA.



1.2 TEORIA DEGLI INSIEMI



Per descrivere le collezioni di elementi li mettiamo in sacchetti detti INSIEMI. Il simbolo del linguaggio matematico che sta ad indicare "A è l'insieme che contiene un cubo, Theta, sei e Good Vibes" è

$$A = \{ \text{cubo}, \theta, 6, \text{GOOD VIBES} \}.$$

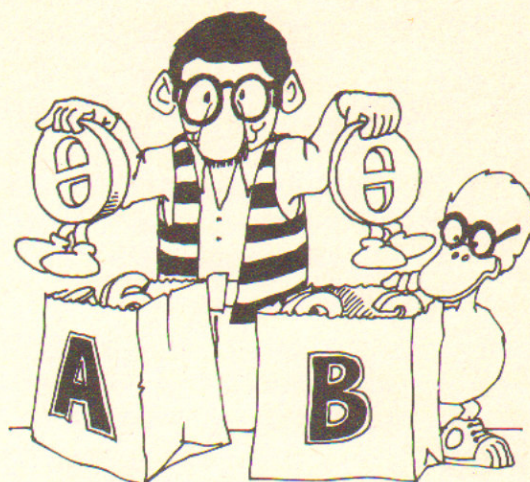
Pensate alle parentesi graffe e come ai lati del sacchetto e immaginate A come un'etichetta.

Se vogliamo dire che un dato elemento è in un certo sacchetto, ad esempio "Theta è nell'insieme A" questo si esprime in simboli così:

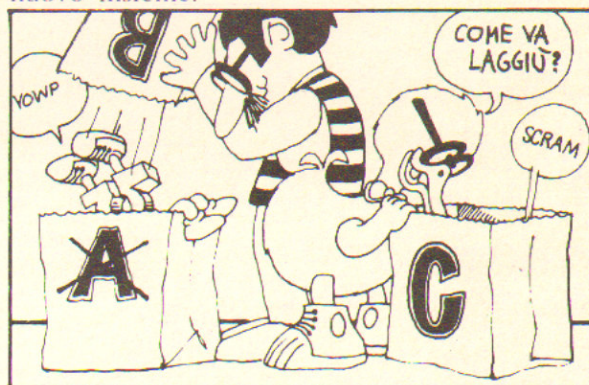
$$\theta \in A$$

dove il simbolo $\in$ significa "è un membro dell'insieme".

I matematici fanno ogni sorta di operazioni con gli insiemi, come ad esempio tentare di stabilire se e quali elementi hanno in comune due diversi insiemi...

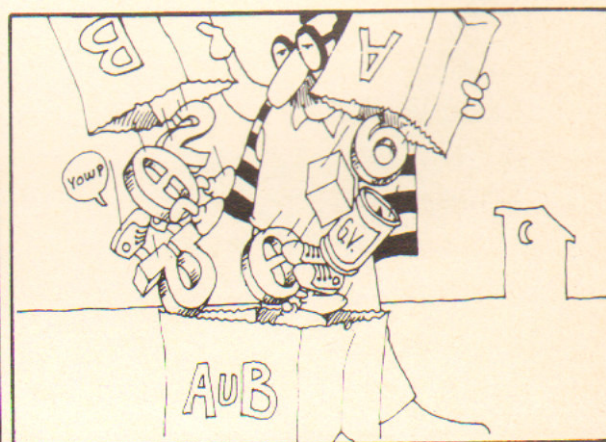
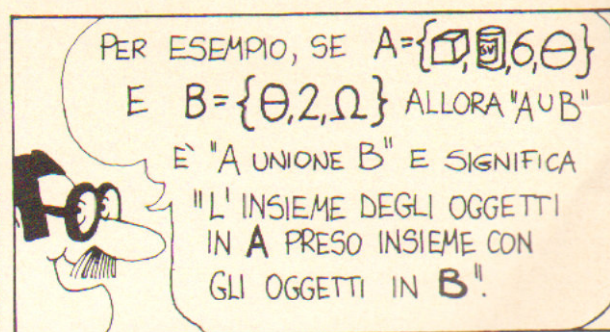


...o unire due insiemi per formare un nuovo insieme.



Lo studio di questi procedimenti, che possono diventare molto complicati, viene chiamato TEORIA DEGLI INSIEMI. Ecco alcune regole fondamentali di questo gioco.

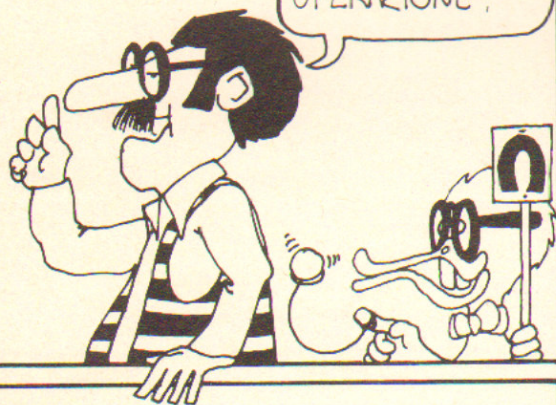




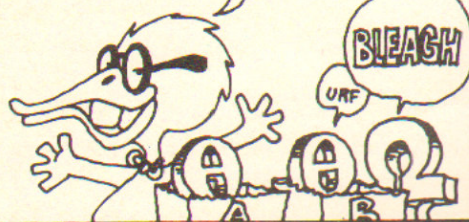
REGOLA

4

DUE INSIEMI POSSONO ESSERE DIVERSI, MA AVERE ALCUNI ELEMENTI IN COMUNE. IN QUESTO CASO SI POSSONO METTERE GLI ELEMENTI COMUNI IN UN NUOVO INSIEME DETTO **INTERSEZIONE** DEGLI INSIEMI. IL SIMBOLO " $\cap$ " CON I NOMI DEGLI INSIEMI STA AD INDICARE CHE ABBIAMO COMPIUTO QUESTA OPERAZIONE.



IN OGNUNO DI QUESTI SACCHETTI C'È UN THETA. PER CHIAREZZA FACENDO L'INTERSEZIONE DI QUESTI DUE INSIEMI SAREBBE MEGLIO METTERE I DUE THETA NELLO STESSO SACCHETTO, SEGUENDO LE REGOLE ALLA LETTERA.



Per esempio, se $A = \{\theta, \vartheta, 6, \theta\}$

e $B = \{\theta, 2, \Omega\}$,

"A intersezione B" è "l'insieme di quegli elementi in A che sono anche in B", e questo è l'insieme che contiene solo Theta. In simboli matematici abbiamo

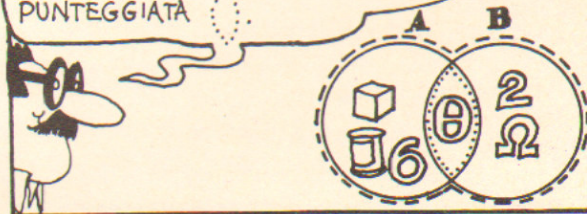
$$A \cap B = \{\theta, \vartheta, 6, \theta\} \cap \{\theta, 2, \Omega\} = \{\theta\}.$$

Può capitare che due insiemi non abbiano NIENTE in comune. In questo caso facciamo uso di un insieme che non contiene alcun elemento. Questo particolare insieme è detto "insieme vuoto" e si indica col simbolo ϕ . Quindi $\phi = \{ \}$.

PER ESEMPIO, SE $A = \{3, \Omega\}$
E $B = \{\theta\}$, ALLORA
 $A \cap B = \{3, \Omega\} \cap \{\theta\} = \{ \} = \phi!$



I MATEMATICI SPESSO DESCRIVONO QUESTO FATTO USANDO CERCHI INVECE DI SACCHETTI. I CERCHI SI INTERSECANO QUANDO GLI INSIEMI HANNO ELEMENTI IN COMUNE. QUESTA RAPPRESENTAZIONE VIENE CHIAMATA DIAGRAMMA DI **VENN**. DATI $A = \{\theta, \vartheta, 6, \theta\}$ E $B = \{2, \Omega, \theta\}$ $A \cup B$ È QUELLO CHE SI TROVA ALL'INTERNO DELLA LINEA TRATTEGGIATA $\cdots$ E $A \cap B$ È QUELLO CHE SI TROVA ALL'INTERNO DELLA LINEA PUNTEGGIATA $\cdots$



ESERCIZI



I.2.1 Se $A = \{\text{cubo}, \text{cilindro}, 6, 0\}$,
 $B = \{0, 2, \Omega\}$, $C = \{3, 6, \Omega, \text{cubo}\}$
 e $D = \{\text{cubo}, 3, \text{cubo}\}$.

Determinare

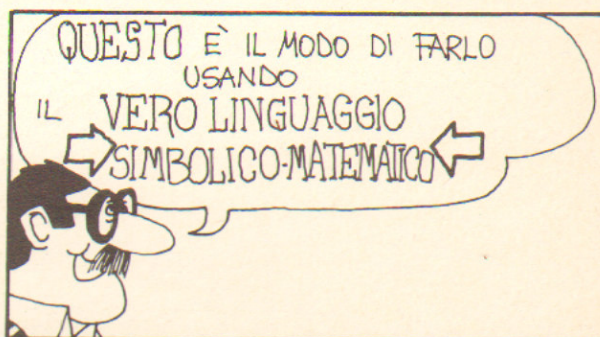
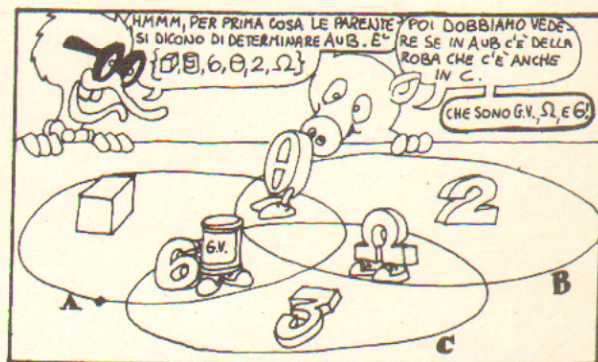
(a) $A \cap C = \{?\}$

(b) $B \cup C = \{?\}$

(c) $B \cap D = \{?\}$

(d) $C \cap \emptyset = \{?\}$

(e) $C \cup \emptyset = \{?\}$



$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap C &= \\ (\{0, 6, \text{cubo}, 0\} \cup \{0, 2, \Omega\}) \cap \{6, \text{cubo}, 3, \Omega\} \\ &= \{0, 6, \text{cubo}, 0, 2, \Omega\} \cap \{6, \text{cubo}, 3, \Omega\} \\ &= \{6, \text{cubo}, \Omega\} ! \end{aligned}$$

Provate a farne qualcuno. I diagrammi di Venn di R. D. potranno esservi d'aiuto.

I.2.2 $A \cup (B \cap C) =$

Questo risultato dovrebbe essere diverso da $(A \cup B) \cap C$. Bisogna fare attenzione nel cambiare di posto le parentesi.

SI POSSONO USARE RIPETUTAMENTE L'UNIONE ($\cup$) E L'INTERSEZIONE ($\cap$) FINO A FORMARE INSIEMI TERRIBILMENTE COMPLICATI, USANDO LE PARENTESI PER RICORDARSI QUALE OPERAZIONE BISOGNA ESEGUIRE PER PRIMA. PER ESEMPIO R.D. E PIGGY ORA IMPIEGHERANNO UN DIAGRAMMA DI VENN PER RISOLVERE $(A \cup B) \cap C$.

I.2.3 $(A \cap B) \cap C =$

I.2.4 $(A \cap C) \cup (B \cap C) =$

PSST... DOVREBBE ESSERE LA STESSA COSA CHE $(A \cup B) \cap C$

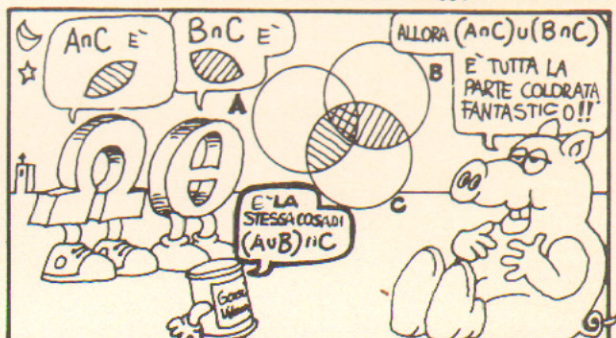
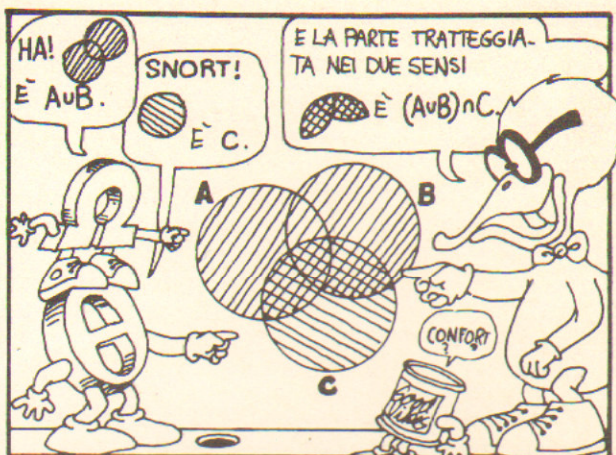
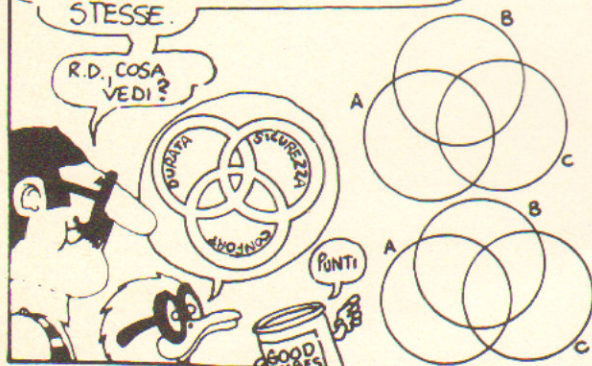
I.2.5 $(A \cup B) \cap (A \cup C) =$

PSST... DOVREBBE ESSERE LA STESSA RISPOSTA DI I.2.2

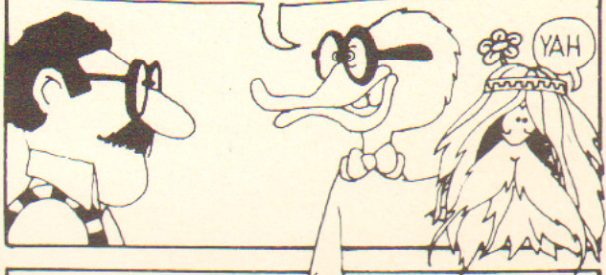
A VOLTE ESPRESSIONI CONTENENTI $\cup$ E $\cap$ NON SEMBRANO SIMILI, MA DANNO LO STESSO RISULTATO PER QUALSIASI INSIEME IN GIOCO. PER ESEMPIO RISULTA CHE $(A \cup B) \cap C$ È SEMPRE UGUALE A $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

QUESTO SI PUÒ VEDERE DUE DIAGRAMMI DI VENN PER TRE INSIEMI. SU UNO DEI DIAGRAMMI TRATTEGGIATE LA PARTE CHE RAPPRESENTA $(A \cup B) \cap C$ E SULL'ALTRO LA PARTE CHE RAPPRESENTA $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ E VEDETE SE LE PARTI COLORATE SONO LE STESSA.

R.D., COSA VEDI?



NON ABBIAMO VERAMENTE BISOGNO DI TUTTA LA TEORIA DEGLI INSIEMI PER IL CALCOLO DIFFERENZIALE, MA PER I POTENZIALI CULTORI DELLA TEORIA DEGLI INSIEMI COME IL MIO AMICHETTO ORAZIO, ABBIAMO QUALCHE ALTRO PROBLEMA.



I.2.6 PROBLEMI EXTRA

per i patiti della teoria degli insiemi

Tracciare diagrammi di Venn tratteggiati per controllare questi risultati:

- (a). $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
(segue alla pagina successiva)

$$(b) (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

$$(c) A \cup B = B \cup A.$$

$$(d) A \cap B = B \cap A.$$

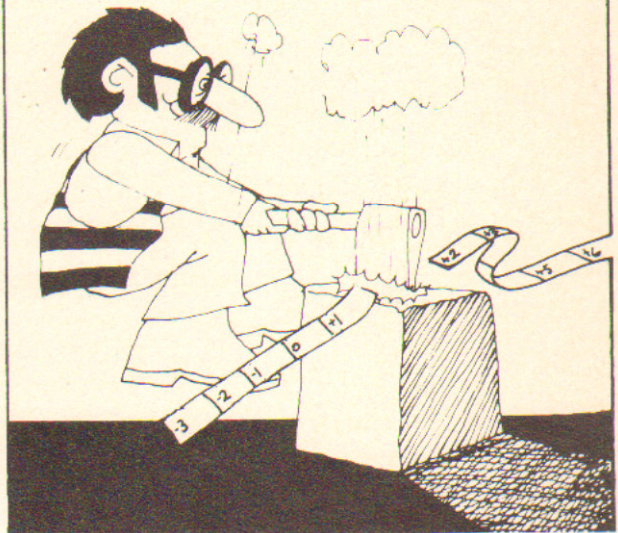
$$(e) (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

$$(f) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

13 INSIEMI DI NUMERI



Se prendiamo l'intervallo di numeri reali da -3 a $+2 \dots$



...e lo mettiamo in un sacchetto, il sacchetto che contiene questo tratto è chiamato "intervallo" e viene indicato nel SUPER gergo-simbolico così

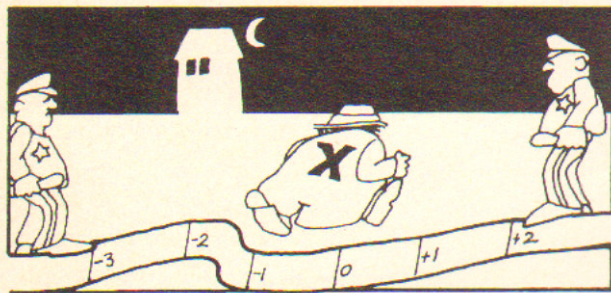
$$\{x | x \in \mathbb{R}; -3 < x < 2\}!$$





In $\{x | x \in \mathbb{R}; -3 < x < 2\}$,

"x" rappresenta UN QUALSIASI numero compreso nell'intervallo tra -3, e 2, -3 e 2 ESCLUSI.



Se vogliamo l'insieme che contiene il segmento dell'asse reale da -3 a 2 e INCLUDE i numeri -3 e 2, usiamo il simbolo " $\leq$ " (minore o uguale) e scriviamo

$$\{x | x \in \mathbb{R}; -3 \leq x \leq 2\}$$

Per indicare questi due insiemi possiamo anche usare simboli più brevi:

$(-3, 2)$ indica $\{x | x \in \mathbb{R}; -3 < x < 2\}$

e $[-3, 2]$ indica $\{x | x \in \mathbb{R}; -3 \leq x \leq 2\}$.

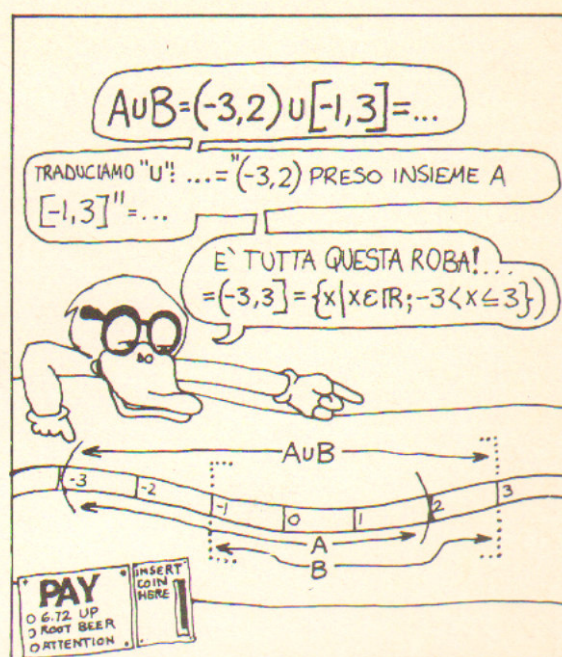
In questo caso le parentesi quadre "[" e "]" vengono usate con lo stesso significato di " $\leq$ " e le parentesi tonde "(" e ")" stanno per "<". (Più avanti useremo simboli come " $(-3, 2)$ " per indicare le coordinate di un punto, che sono un caso del tutto diverso. Dovrete capire dal contesto il significato del simbolo. In generale sarà chiaro).

Un modo comodo per trovare le unioni e le intersezioni di questi intervalli di numeri è di rappresentarli sull'asse reale, usando le parentesi quadre o tonde per ricordare quando vengono impiegati i simboli " $\leq$ " e "<".

Se $A = (-3, 2) = \{x | x \in \mathbb{R}; -3 < x < 2\}$

e $B = [-1, 3] = \{x | x \in \mathbb{R}; -1 \leq x \leq 3\}$,

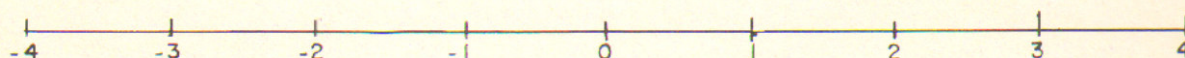
R. D. e il prof. McSquared troveranno $A \cap B$ e $A \cup B$. Se necessario, nella stessa espressione si possono usare sia parentesi tonde che parentesi quadre.



ESERCIZI



Sia $A = (-3, 2)$, $B = [-1, 3]$ e $C = (-2, -1]$. Indicate A, B, e C sull'asse reale e rispondete alle domande date qui di seguito; scrivete le risposte usando sia la notazione insiemistica con le parentesi graffe $\{ \}$ che la notazione più breve con combinazioni di "[", "]", e di "(", e ")".



I.3.1 $A \cap C =$

I.3.2 $A \cup C =$

I.3.3 $B \cap C =$

I.3.4 $B \cup C =$

I.3.5 $(B \cup C) \cap A =$

I.3.6 $(B \cap C) \cap A =$

I.3.7 $A \cup (B \cap C) =$

I.3.8 $(A \cap B) \cup C =$

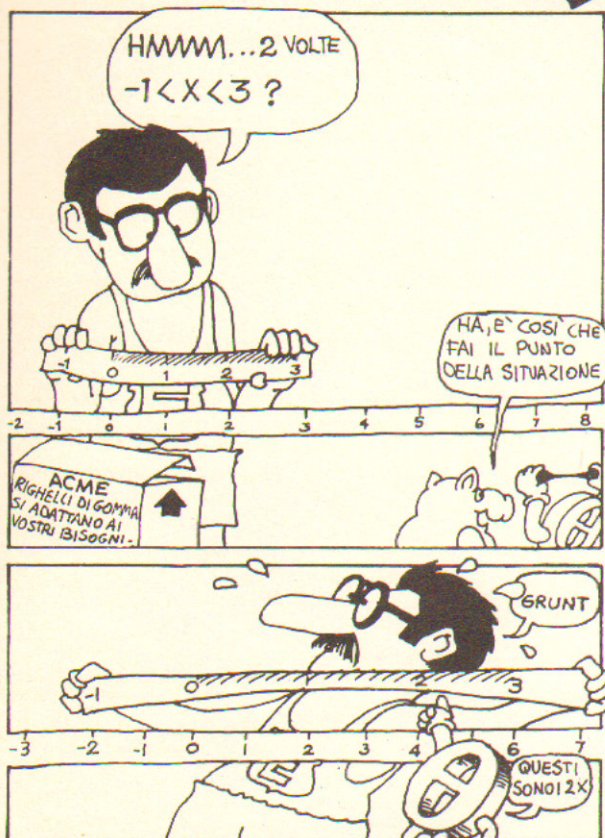
In seguito parleremo molto di "diseguaglianze" come $0 \leq x < 3$, che intervengono nelle descrizioni di intervalli del tipo

$$\{x \mid x \in \mathbb{R}; 0 \leq x < 3\}.$$

In particolare compiere operazioni come moltiplicare ogni numero di un insieme descritto da disequaglianze per una costante e vedere che risultato si ottiene. Per esempio, cosa succede se moltiplichiamo ogni numero x in

$$\{x \mid x \in \mathbb{R}; 0 \leq x < 3\} = [0, 3)$$

per 2? Ogni numero che prima soddisfaceva alla disequaglianza $0 \leq x < 3$ sarà raddoppiato, andando ad occupare una nuova porzione dell'asse reale: è come tirare il vecchio intervallo $[0, 3)$ fino a farlo diventare lungo il doppio, lasciando lo 0 al suo posto, e andando a vedere dove si finisce. ➡



Allora, anche se 0, essendo $0 = 2 \cdot 0$, rimarrà al suo posto, 3 si sposterà fino a $2 \cdot 3 = 6$ e le x raddoppiate si sposteranno insieme con il 3. (Quando tra due numeri c'è un punto, come " $2 \cdot 3$ ", sta ad indicare la moltiplicazione "2 volte 3").

Quindi se x soddisfa alla disequaglianza $0 \leq x < 3$, allora "due volte questi x ", che è il significato di " $2x$ ", soddisfa alle

$$\text{(moltiplicare per 2)} \quad 2 \cdot 0 \leq 2x < 2 \cdot 3$$

$$\text{oppure} \quad 0 \leq 2x < 6.$$

Mentre gli x si trovano ancora nell'intervallo $0 \leq x < 3$, questi $(2x)$ copriranno l'intervallo $[0, 6)$ da 0 fino a 6. Possiamo anche scriverlo in simboli così:

$$\{2x \mid x \in \mathbb{R}; 0 \leq x < 3\} = [0, 6).$$

Notate dove appare " $2x$ "!

Se i numeri cominciano da 1 invece che da 0, moltiplicando ogni elemento dell'intervallo per 2, il punto di partenza 1 si sposterà a 2 e otterremo una nuova porzione di numeri reali da 2 a 6.

In disequaglianze, se x soddisfa a

$$1 \leq x < 3$$

allora " $2x$ " soddisfa a

$$2 \cdot 1 \leq 2x < 2 \cdot 3$$

$$\text{oppure} \quad 2 \leq 2x < 6.$$

Possiamo esprimere la stessa cosa anche usando gli insiemi:

$$\{2x \mid x \in \mathbb{R}; 1 \leq x < 3\} = [2, 6).$$

Ancora una volta " $2x$ " è all'interno delle parentesi graffe per indicare che tutti gli x in $[1, 3)$ sono stati raddoppiati.

Se l'intervallo in questione contiene anche numeri negativi, come le x che soddisfano alla disequaglianza

$$-1 < x < 3,$$

allora, quando moltiplichiamo per 2, il 3 si sposta fino a 6 e 0 resta allo 0 di partenza, ma -1 si sposta all'indietro fino a $-2 = (2) \cdot (-1)$, cioè l'insieme dei numeri si allunga anche nella direzione negativa. Usando ancora le disequaglianze:

Se x soddisfa a $-1 < x < 3$
allora " $2x$ " soddisfa alla disequaglianza

$$(2) \cdot (-1) < 2x < 2 \cdot 3$$

o $\{2x \mid x \in \mathbb{R}; -1 < x < 3\} = (-2, 6).$

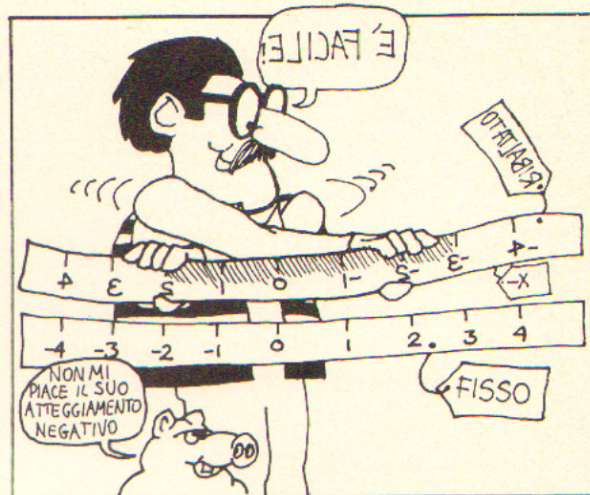
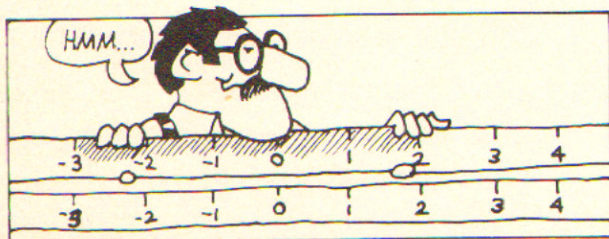
Infine, se moltiplichiamo tutti gli elementi di un intervallo per un numero positivo minore di 1, diciamo $1/3$, l'intervallo si "accorcia" a $1/3$ della sua lunghezza originaria; per esempio, se x soddisfa alla disequaglianza $-1 < x < 3$ allora " $1/3x$ " soddisfa alla disequaglianza,

$$\left(\frac{1}{3}\right) \cdot (-1) < \frac{1}{3}x < \frac{1}{3} \cdot 3$$

o $\left\{\frac{1}{3}x \mid x \in \mathbb{R}; -1 < x < 3\right\} = \left(-\frac{1}{3}, 1\right).$

Se la costante moltiplicativa è negativa, le cose diventano più complicate. Moltiplicando un numero per -1 lo si "ribalta" rispetto allo 0 spostandolo sulla semiretta opposta dell'asse reale:

2 va a $(-1) \cdot (2) = -2$
mentre -3 va a $(-1) \cdot (-3) = 3.$



Tutto questo ha strane conseguenze sulle disequaglianze. Prendiamone una semplice come

$$-3 < 2,$$

che si potrebbe leggere " -3 è 'a sinistra di' 2 sull'asse reale". Ma se moltiplichiamo tutto per -1 , otteniamo

$$3 = (-1) \cdot (-3) > (-1) \cdot (2) = -2,$$

dove " $>$ " significa "maggiore di". Quindi moltiplicando una disequaglianza per -1 (o per un qualsiasi numero negativo) si RIBALTA il segno di disequaglianza da " $<$ " a " $>$ " oppure da " $\leq$ " a " $\geq$ ", (dove $\geq$ significa "maggiore di o uguale a", purché i numeri di partenza -3 e 2 (moltiplicati per -1) rimangano, nella disequaglianza, nella loro posizione originale.

Prendiamo un intervallo di numeri come $[-3, 2)$ e moltiplichiamo tutti i suoi elementi per -1 . Se consideriamo questi x , definiti dalla disequaglianza

$$-3 \leq x < 2 \quad \text{QUESTI SI RIBALTERANNO}$$

e li moltiplichiamo per -1 , otteniamo

$$(-1) \cdot (-3) \geq (-1) \cdot (x) > (-1) \cdot (2)$$

oppure $3 \geq -x > -2$.
Questi sono la versione RIBALTATA DEI SEGNI DI DISEGUAGLIANZA ORIGINARI.
Quindi $-x$ (ricordatevi che ora stiamo parlando di numeri negativi) soddisfa a

$$3 \geq -x > -2.$$

DECIFRANDO ATTENTAMENTE I SEGNI DI DISEGUAGLIANZA E VERIFICANDO IL LORO SIGNIFICATO SULL'ASSE REALE, SI VEDE CHE $3 \geq -x > -2$ È ESATTAMENTE LA STESSA COSA CHE $-2 < -x \leq 3$.



STIAMO SEMPLICEMENTE "RIBALTANDO" TUTTI I SIMBOLI DELLA DISEGUAGLIANZA DA $3 \geq -x > -2$ A $-2 < -x \leq 3$.

QUESTO NON C'ENTRA NIENTE COL "RIBALTAMENTO" DI UN INTERVALLO REALE MOLTIPLICANDOLO PER -1 CHE ABBIAMO FATTO PRIMA. COMUNQUE OTTENIAMO L'INTERVALLO $(-2, 3]$.



Riassumiamo tutto il ragionamento usando la teoria degli insiemi:

$$\{-x \mid x \in \mathbb{R}; -3 \leq x < 2\} = (-2, 3] .$$

Infine, se moltiplichiamo tutti gli elementi di un intervallo per un numero negativo come -2 , l'intervallo si ribalterà e si allungherà del doppio, coprendo una nuova porzione dell'asse reale.

Per esempio, se gli x soddisfano a

$$-3 \leq x < 2$$

allora per questi x , (moltiplicati per -2)

$$6 = (-2) \cdot (-3) \geq -2x > (-2) \cdot (2) = -4.$$

Questa disuguaglianza è esattamente la stessa di

$$-4 < -2x \leq 6 !$$

quindi $\{-2x \mid x \in \mathbb{R}; -3 \leq x < 2\} = (-4, 6]$.

Questo qui è un po' più difficile da disegnare...



ESERCIZI



1.3.9 Se gli x soddisfano a

$$-2 < x \leq 1,$$

a quale disequaglianza soddisfano i $2x$?

Quale disequaglianza vale per l'insieme dei $(1/2 x)$?

Quale disequaglianza vale per l'insieme dei $(-3x)$?

1.3.10 Se gli x soddisfano a

$$-1 \geq x > -3/2,$$

quale disequaglianza varrà per l'insieme dei $2x$?

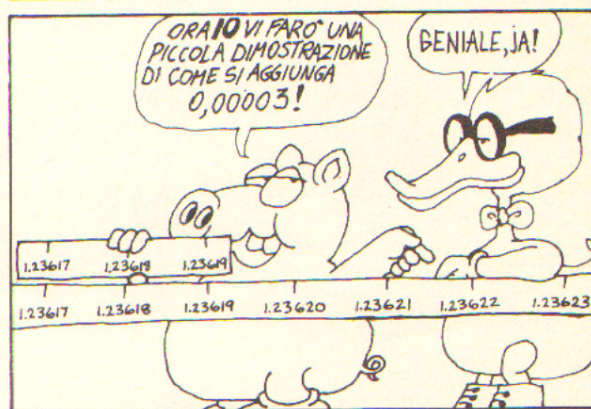
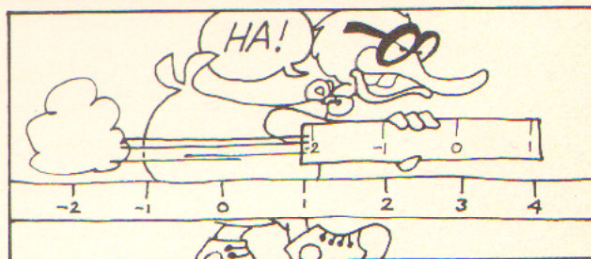
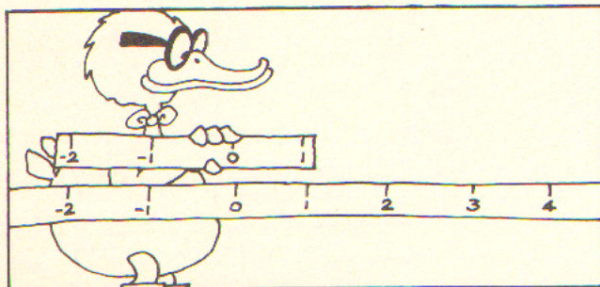
Quale disequaglianza varrà per l'insieme dei $(1/2x)$?

Quale disequaglianza varrà per l'insieme dei $(-3x)$?

A volte ad ogni numero di un insieme descritto da disequaglianze viene aggiunta una costante. La somma è molto più facile da trattare rispetto al prodotto. Per esempio, se aggiungiamo 3 a ciascun numero dell'insieme

$$\{x \mid x \in \mathbb{R}; -2 < x < 1\} = (-2, 1)$$

è come se spostassimo $(-2, 1)$ di tre unità verso DESTRA.



Quindi se x soddisfa la

$$-2 < x < 1,$$

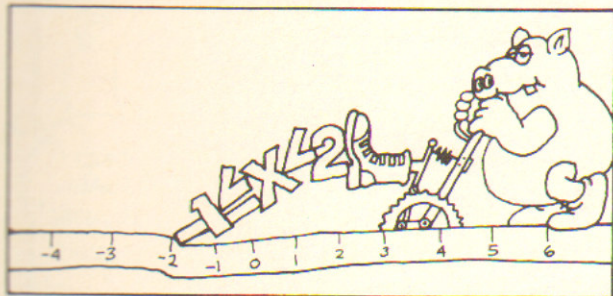
allora $x+3$ (si aggiunge 3 a questi x) soddisfa la (aggiungere 3 a tutto)

$$-2+3 < x+3 < 1+3$$

ovvero $1 < x+3 < 4$. Pertanto

$$\{x+3 \mid x \in \mathbb{R}; -2 < x < 1\} = (1, 4).$$

Se avessimo sommato un numero negativo, come -4 , ad ogni numero di un insieme, avremmo semplicemente spostato l'insieme di 4 unità verso SINISTRA.



Per esempio, se x soddisfa la

$$-1 \leq x < 2,$$

allora si $x-4$ (si aggiunge 4 a questi x) soddisfa la

$$-1-4 \leq x-4 < 2-4$$

oppure $-5 \leq x-4 < -2$. Quindi

$$\{x-4 \mid x \in \mathbb{R}; -1 \leq x < 2\} = [-5, -2).$$

Ecco altri due esercizi per farsi un po' la mano.

1.3.11 Sommare -4 a ogni numero dell'insieme $\{x \mid x \in \mathbb{R}; -5 \leq x < 4\}$.

Quale intervallo si ottiene ?

1.3.12 Sommare $3/2$ a ogni numero in

$$\{x \mid x \in \mathbb{R}; 2 \geq x > -1\}.$$

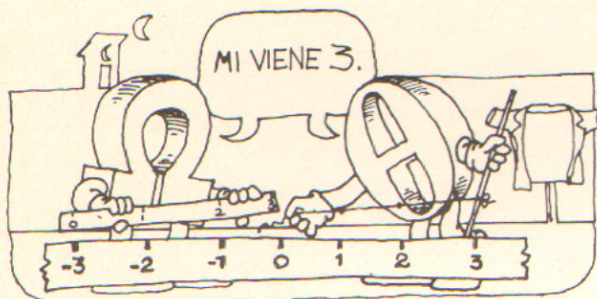
Quale intervallo si ottiene ?





Il "valore assoluto" di un numero non è altro la "distanza" considerata sempre positiva (o "0" se il numero è proprio lo zero). Usando il simbolo abbiamo,

$$|2| = 2; |-3| = 3; |3| = 3; \text{etc.}$$



Notiamo che, siccome $|2| = 2 = |-2|$, $|-105| = 105 = | -(-105) |$, etc., abbiamo
 |un numero qualsiasi| = |quel numero negativo|
 per qualsiasi segno del "numero qualsiasi".

Possiamo introdurre ulteriori simboli di valore assoluto " $|$ " per trasformare il valore assoluto del prodotto di due numeri nel prodotto dei loro valori assoluti.

Per esempio

$$|(-3) \cdot (2)| = |(-3)| \cdot |(2)|,$$

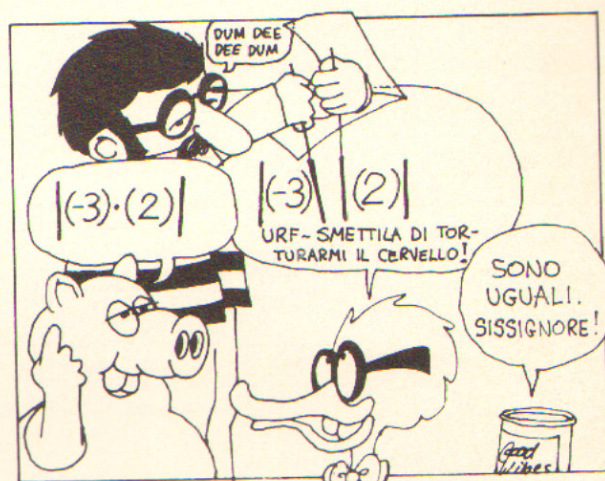
quindi tutt'e due i prodotti sono uguali a 6: verifichiamolo.

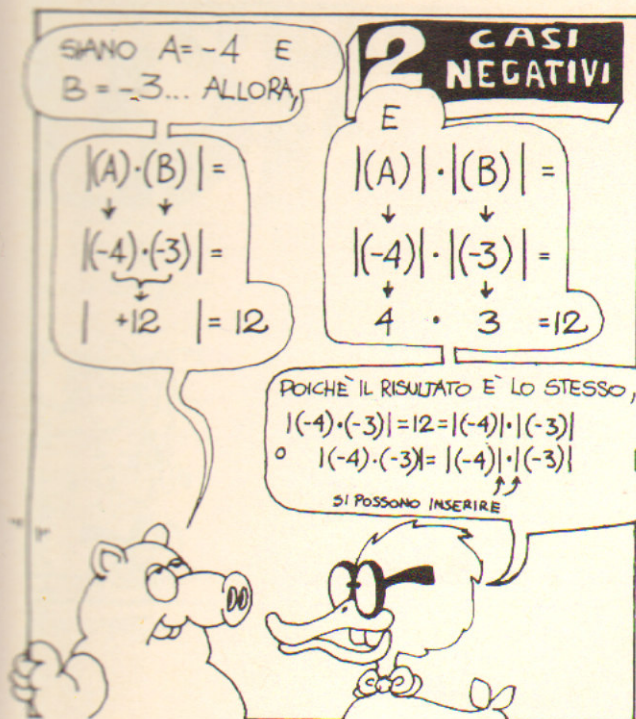
$$|(-3) \cdot (2)| =$$

$$|-6| = 6$$

$$\text{e anche } |(-3)| \cdot |(2)| =$$

$$3 \cdot 2 = 6.$$





Tuttavia NON POSSIAMO inserire simboli
 addizionali di valore assoluto nel modulo delle
 SOMME senza modificare in certi casi le equa-
 zioni.

$$|2| + |3| = 5 = |2 + 3| \text{ è O.K.}$$

come anche

$$|-2| + |-3| = 2 + 3 = 5 = |(-2) + (-3)|,$$

ma se uno dei numeri è negativo e l'altro posi-
 tivo, le cose cambiano;

$$|(-2)| + |(3)| = 5$$

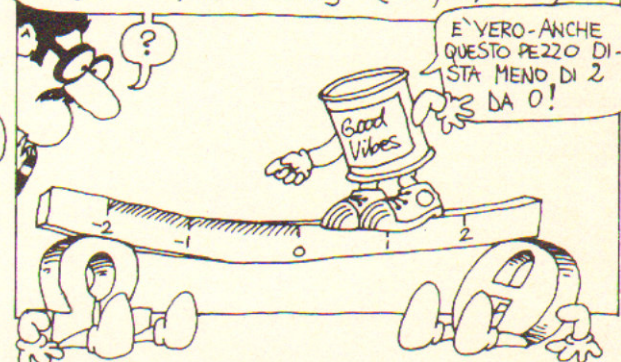
NON è uguale a

$$|(-2) + (3)| = |1| = 1.$$

Tuttavia per due numeri qualsiasi a e b è sem-
 pre vero che

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

I SIMBOLI DI VALORE ASSOLUTO INTERVENGONO
 IN INSIEMI DEL TIPO $\{x | x \in \mathbb{R}, |x| < 2\} =$ "L'INSIE-
 ME DEI NUMERI REALI x LA CUI DISTANZA DA 0
 È MINORE DI 2." MA NUMERI SIA POSITIVI
 CHE NEGATIVI POSSONO AVERE UNA DISTANZA
 DA 0 MINORE DI 2, COSÌ QUESTO INSIEME
 È $\{x | x \in \mathbb{R}, -2 < x < 2\} = (-2, 2)$.



COSÌ, SE SI SODDISFA
 $|x| < 2$,
 ALLORA $-2 < x < 2$.

POSSIAMO RIPETERE QUESTO
 RAGIONAMENTO ALL'INVERSO -
 OGNI VOLTA CHE x SODDISFA UNA
 DISEGUAGLIANZA DEL TIPO $-3 < x < 3$,
 POSSIAMO DIRE CHE $|x| < 3$ (LA DI-
 STANZA DI x DA 0 È MINORE
 DI 3).

IN SEGUITO CI SERVIRÀ MOLTO
 PASSARE DA UN' ESPRESSIONE
 ALL'ALTRA; UNA PUÒ SEMPRE
 ESSERE TRASFORMATA
 NELL'ALTRA.





VI PRESENTIAMO QUI DI SEGUITO ALCUNI ESERCIZI. I PRIMI DUE SONO SVOLTI... MA FATE ATTENZIONE - IL SECONDO È MOLTO INFIDO. *la direzione.*

ESERCIZI



1.3.A Quale intervallo numerico è descritto dalla disequaglianza

$$|x + 2| < 3 \quad ?$$

Risposta: siccome

$$|x + 2| = |x - (-2)|,$$

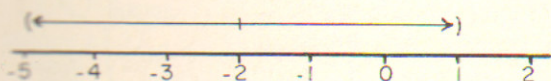
questi x devono essere a una distanza compresa tra zero e 3 dal numero -2 ; verifichiamolo:

$$\text{se } |x + 2| < 3$$

$$\text{allora } -3 < x + 2 < 3 \quad \text{ovvero}$$

(sommando -2):

$$-5 = -3 - 2 < x < 3 - 2 = 1$$



1.3.B Quale intervallo numerico è descritto dalla disequaglianza

$$|2 - 3x| < 1 \quad ?$$

Risposta: innanzitutto, se

$$|2 - 3x| < 1,$$

$$\text{allora } -1 < 2 - 3x < 1.$$

Adesso usiamo l'algebra per isolare x al centro di questa disequaglianza.

Per prima cosa eliminiamo 2 in " $2 - 3x$ " sommando (-2) :

$$-2 - 1 < -2 + 2 - 3x < -2 + 1$$

$$\text{ovvero } -3 < -3x < -1$$

Ora eliminiamo -3 in " $-3x$ " moltiplicando per " $-1/3$ " - ATTENZIONE - questo fa ribaltare i segni di disequaglianza!

1.3. B (Continua)

$$(-1/3) \cdot (-3) > (-1/3) \cdot (-3x) > (-1/3) \cdot (-1)$$

$$\text{ovvero } 1 > x > 1/3$$

che è esattamente la stessa cosa che scrivere

$$1/3 < x < 1,$$

così otteniamo l'intervallo $(1/3, 1)$.

1.3.13 Quale intervallo numerico è descritto dalla disequaglianza

$$|1 - x| < 2 \quad ?$$

1.3.14 Quale intervallo numerico è descritto dalla disequaglianza

$$|2x + 3| < 4 \quad ?$$

1.3.15 Quale intervallo numerico è descritto dalla disequaglianza

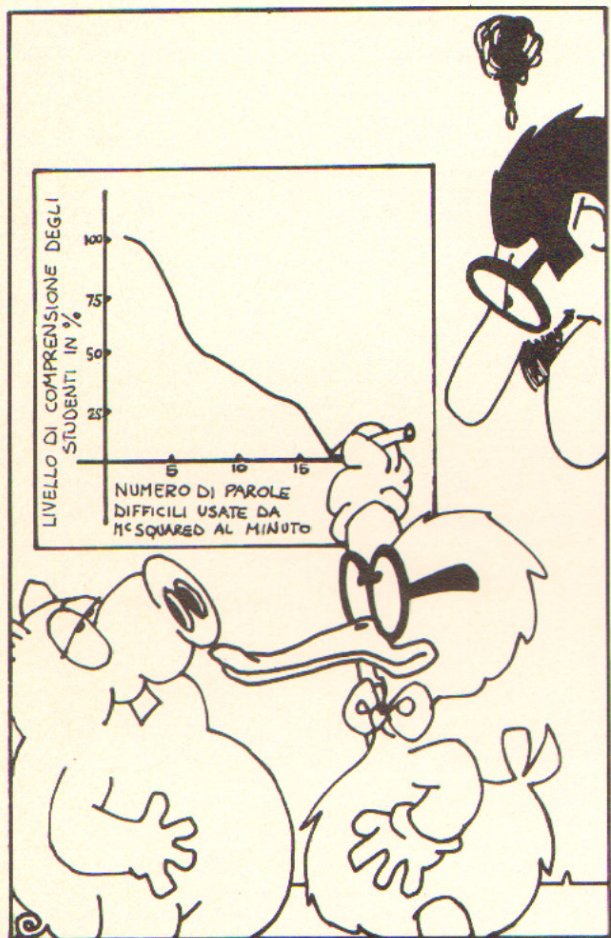
$$|-3 - 1/2 x| < 5 \quad ?$$

1.3.16 Quale intervallo numerico è descritto dalla disequaglianza

$$|2/3 x + 4| < 1/2 \quad ?$$

1.4 FUNZIONI

Ora torniamo al problema dello studio rigoroso del tipo di relazioni che possono essere rappresentate in un grafico.

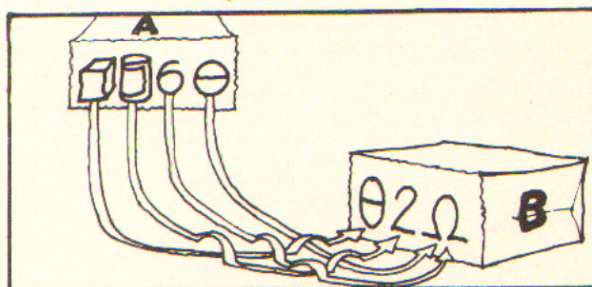


L'idea fondamentale è che abbiamo due collezioni di elementi come "numero di parole difficili" e "livelli", e che c'è qualche tipo di corrispondenza fra di loro. La teoria degli insiemi ci dà un modo di trattare le collezioni di elementi, ma abbiamo ancora bisogno di qualche metodo per trattare le corrispondenze fra due insiemi.

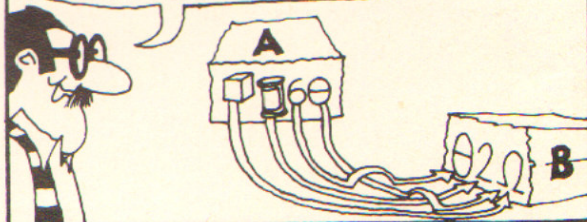
Cominciamo con un esempio semplice: supponiamo che gli insiemi siano

$$A = \{\square, \text{cubo}, 6, \theta\} \text{ e } B = \{\theta, 2, \Omega\}.$$

Allora possiamo INVENTARE una corrispondenza tra A e B e disegnare delle frecce che mostrano le corrispondenze tra i vari elementi.



POTREMO INVENTARE MOLTE ALTRE CORRISPONDENZE TRA GLI INSIEMI A E B CHE VADANO ALTRETTANTO BENE COME ESEMPIO; UNA CORRISPONDENZA DIVERSA POTREBBE ESSERE INVENTATA CAMBIANDO I PUNTI DI ARRIVO DELLE FRECCIE... COSÌ...



I matematici hanno stabilito alcune

REGOLE

per i tipi di corrispondenza da loro preferiti e, ogni particolare corrispondenza che segue queste regole, è detta

FUNZIONE

LE REGOLE PER LE FUNZIONI

LA VOSTRA FUNZIONE CONSISTE IN DUE INSIEMI E UN GROVIGLIO DI FRECCHE CHE OBBEDISCONO ALLE REGOLE.

1 LE FRECCHE PARTONO SEMPRE DALLO STESSO INSIEME, DETTO **DOMINIO** E VANNO VERSO L'ALTRO INSIEME, DETTO **CODOMINIO**.

2 OGNI ELEMENTO DEL DOMINIO DEVE AVERE ESATTAMENTE UNA FRECCIA CHE PARTE DA ESSO. OGNI ELEMENTO DEL CODOMINIO DEVE AVERE ALMENO UNA FRECCIA CHE ARRIVA AD ESSO. (CI POSSONO ESSERE 2 FRECCHE CHE VANNO VERSO LO STESSO ELEMENTO).

Così ci possono essere due o più frecce che colpiscono lo stesso elemento dell'insieme-codominio, ma solo una freccia può provenire da un qualsiasi elemento dell'insieme-dominio.

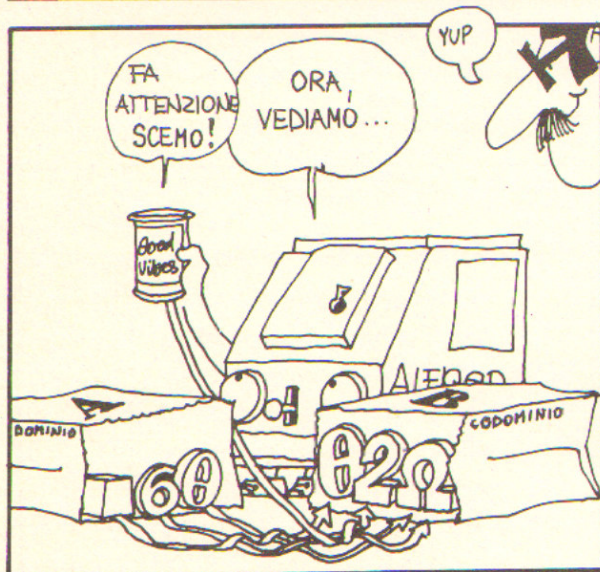
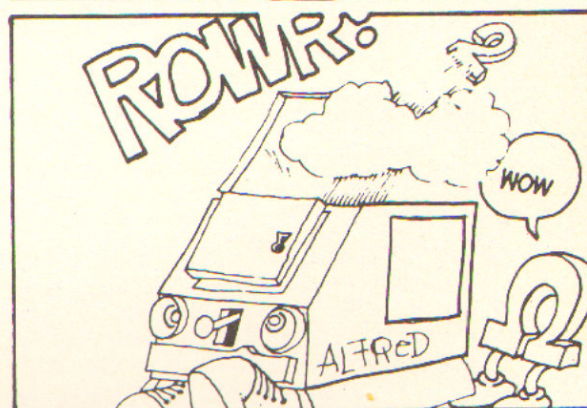
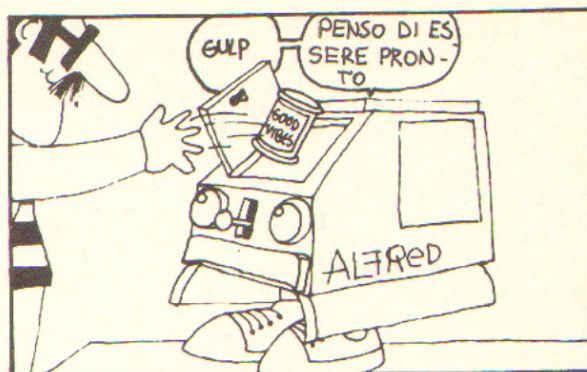
Sfortunatamente l'uso di frecce nelle REGOLE ha i suoi svantaggi: se le funzioni diventano più complicate, può diventare molto difficile seguire le frecce...



QUINDI, PER VEDERE DOVE VANNO A FINIRE LE FRECCHE, INTRODUCIAMO **ALFRED E GROVER** NEL LORO AUTENTICO RUOLO DI *Incredibili Macchine per Funzioni*

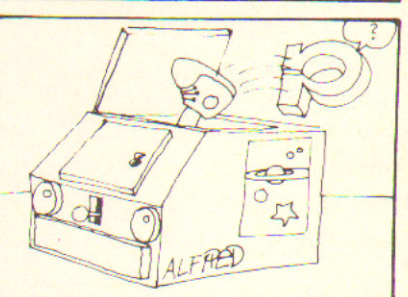
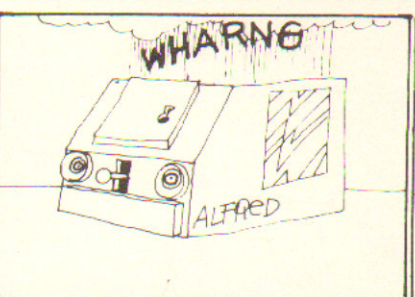
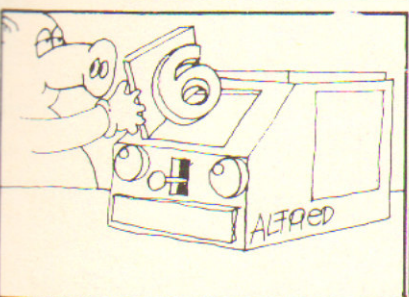
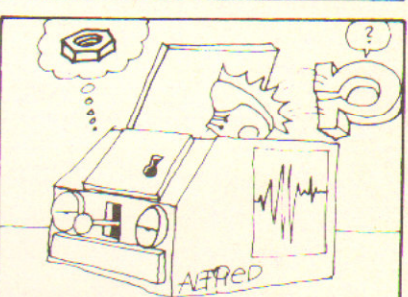
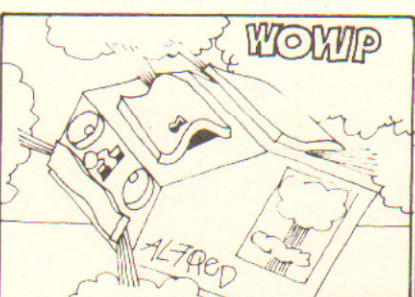
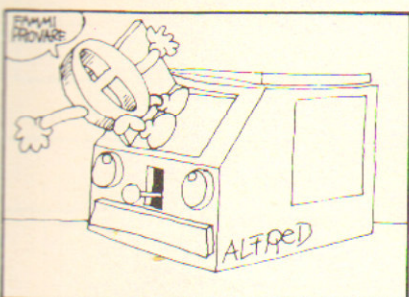
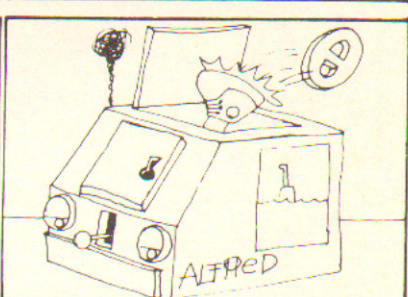
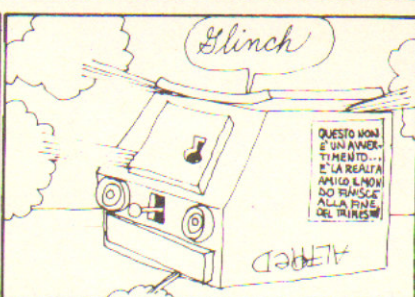
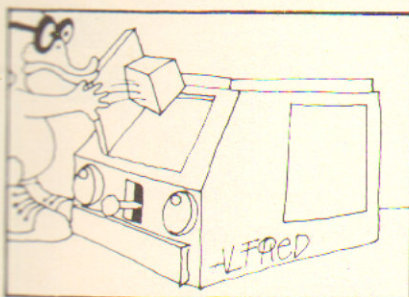
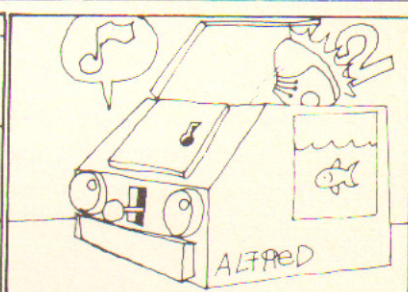
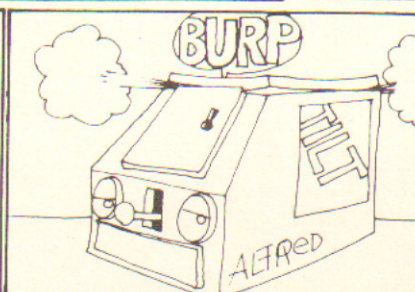
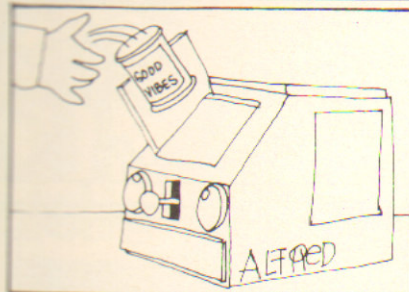
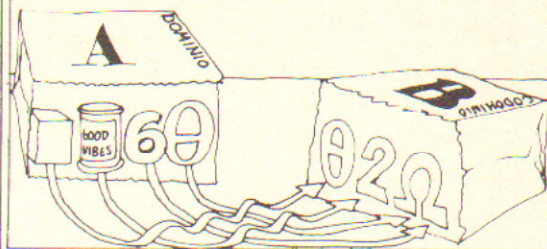


LA SUA SPECIALITÀ È **TRASFOR-**
MARE OGNI COSA DELL' INSIEME
 DOMINIO IN UNA COSA DELL' INSIEME
 CODOMINIO **B** **ESATTAMENTE** NEL
 MODO INDICATO DALLE FRECCIE.



ECCHO A VOI LE AVENTURE DEGLI ELEMENTI
QUANDO PASSANO ATTRAVERSO L'INCREDIBILE
MACCHINA PER FUNZIONI E LA LORO
METAMORFOSI NEI LORO ALTER EGO
MATEMATICI... E' MOLTO ISTRUTTIVO, LO
SAPETE, VERO?

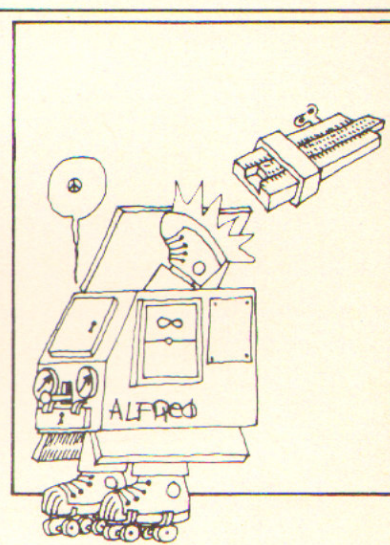
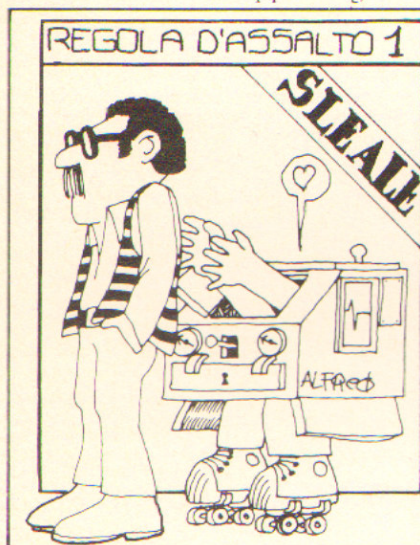
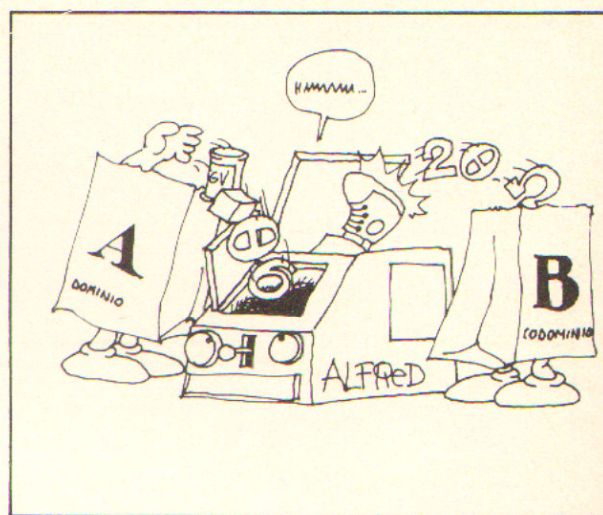
SVOLTA LEGGETE IN QUESTA DIREZIONE..



Così, invece di dover studiare le frecce una per una, quello che ci serve è una macchina per funzioni bene informata (come Alfred).

Dobbiamo capire quali informazioni per il lavoro di Alfred sono contenute nelle REGOLE PER FUNZIONI.

La REGOLA 1 dice che le frecce partono da elementi dell'insieme-dominio e puntano verso elementi dell'insieme-codominio. Questo significa che Alfred può inghiottire soltanto elementi dell'insieme-dominio e vomitare solo elementi che appartengono al codominio.



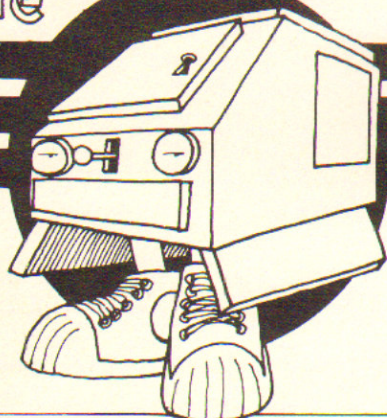
La prima parte della REGOLA 2 è quella che rende possibili le macchine per funzioni: dice che ogni elemento dell'insieme dominio ha esattamente una sola freccia che parte da esso, in questo modo non ci sono ambiguità su quello che deve fare Alfred. La seconda parte della Regola 2 dice che ogni elemento dell'insieme-codominio deve avere almeno una freccia che punta verso di lui, garantendo così che, introducendo l'elemento opportuno nella macchina per funzioni, siamo in grado di ottenere ogni elemento dell'insieme-codominio.



NUOVE ECCEZIONALI
REGOLE UFFICIALI

PER
lo studio delle
★ FUNZIONI ★

CON LA PARTECIPAZIONE
STRAORDINARIA
delle



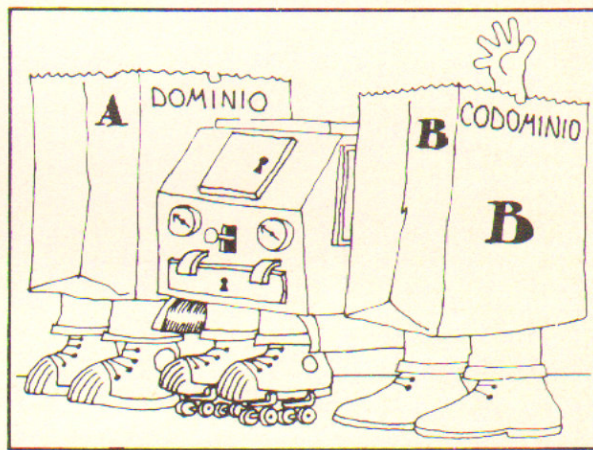
MACCHINE
PER FUNZIONI

Una funzione consiste di due insiemi, detti insieme-dominio e insieme-codominio, e di una macchina per funzioni che segue queste regole:

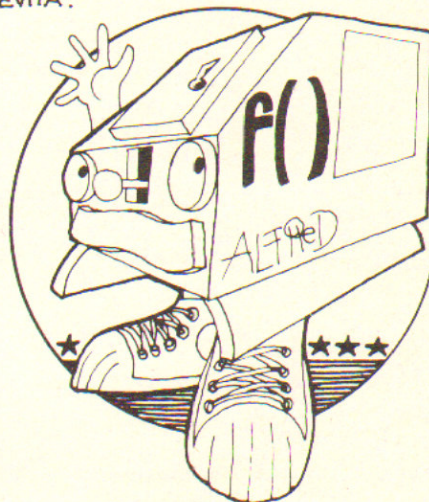
SI AFFITTA
QUESTO SPAZIO

REGOLA 1. La macchina per funzioni può accettare in lavorazione soltanto elementi dell'insieme-dominio e produrre soltanto elementi dell'insieme-codominio.

REGOLA 2 - La macchina per funzioni è non-ambigua: lo stesso stimolo produce sempre la stessa risposta. Ogni elemento dell'insieme-codominio può essere ottenuto inserendo nella macchina un opportuno elemento dell'insieme-dominio.

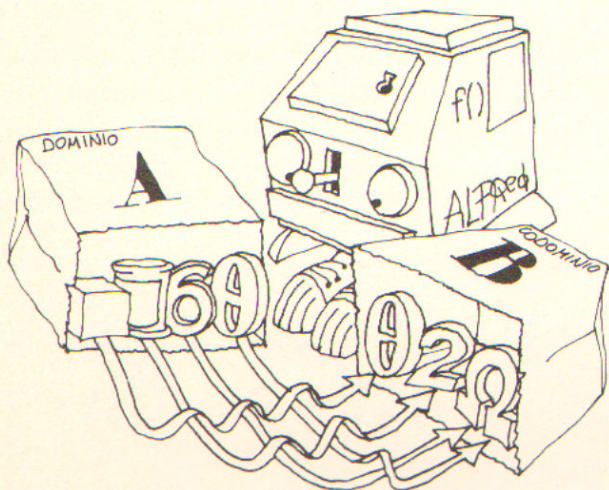


IL SIMBOLO PER ALFRED NEL SUO VERO RUOLO DI MACCHINA PER FUNZIONI È $f()$, CHE SIGNIFICA "f DI QUALCOSA CONTENUTA NELLO SPAZIO TRA LE PARENTESI", O SEMPLICEMENTE "f" PER BREVEZZA.

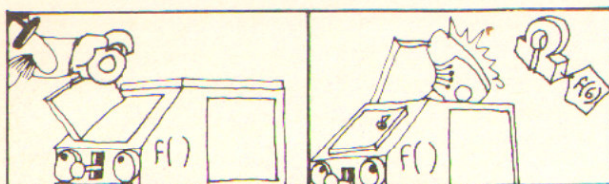


Alfred può in tempi diversi trattare funzioni diverse, ma mantiene sempre il simbolo $f()$; se cambiamo il tipo di funzione da fargli trattare, occorrerà dirlo.

Quando Alfred studia una certa funzione, come



il simbolo $f()$ viene usato per indicare la risposta ad uno stimolo specifico come questo:



e questo è ciò che si intende quando scriviamo

$$f(6) = \Omega$$

(che si legge "f di 6 è uguale ad Omega"). Questo è solo un modo per menzionare il fatto che 6 è trasformato in Omega dalla funzione $f()$. Così, con la stessa funzione,

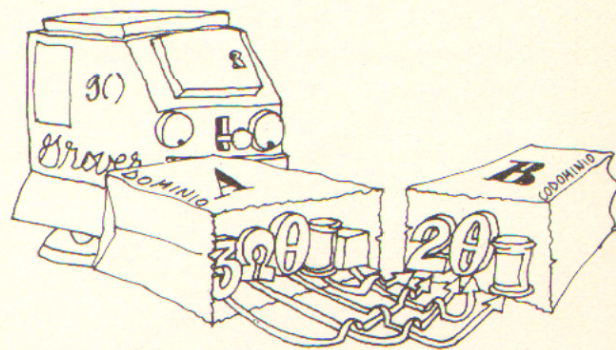
$$f(\Theta) = \Omega,$$

$$f(\boxplus) = \Theta,$$

$$f(\boxtimes) = 2.$$



Questo è Grover che lavora un'altra funzione $g()$.



Provate a sostituire tutti i "?".

$$g(\boxplus) = ? \quad g(3) = ?$$

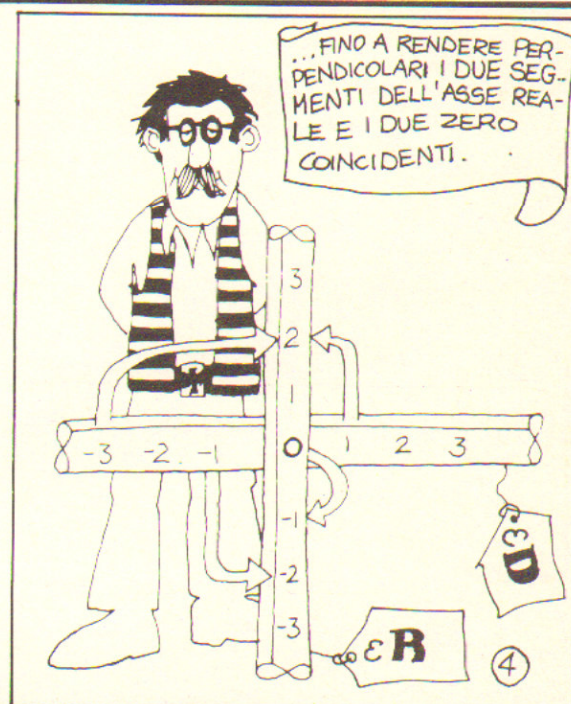
$$g(\boxtimes) = ? \quad g(?) = \boxtimes$$

$$g(?) = \Theta.$$

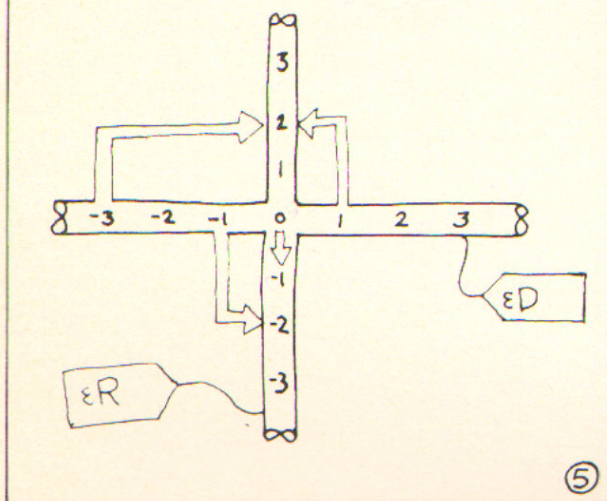
E' possibile trovare un'altra risposta a $g(?) = \Theta$?

Quello che si vede chiaramente descrivendo una funzione con sacchetti e frecce è l'esatta corrispondenza stabilita dalla funzione tra gli elementi del dominio e quelli del codominio. Quando usiamo una macchina come Alfred, LUI sa come si comporta la funzione, ma noi NON lo sappiamo perché non abbiamo più le frecce.

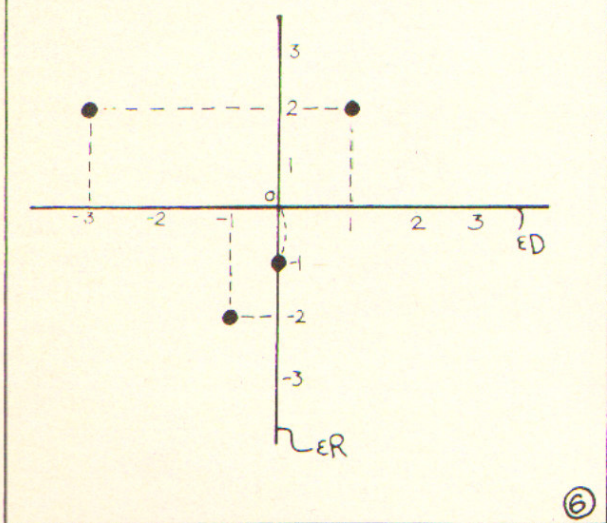
Quando l'insieme-dominio e l'insieme-codominio di una funzione sono parti dell'asse reale vi è un modo semplice e rapido di indicare le corrispondenze tra gli elementi degli insiemi senza usare le frecce, costruendo quello che viene chiamato il "grafico" della funzione. Il prof. Mc Squared mosterà come modificare la rappresentazione di una funzione mediante "sacchetti e frecce" in una rappresentazione mediante un "grafico".



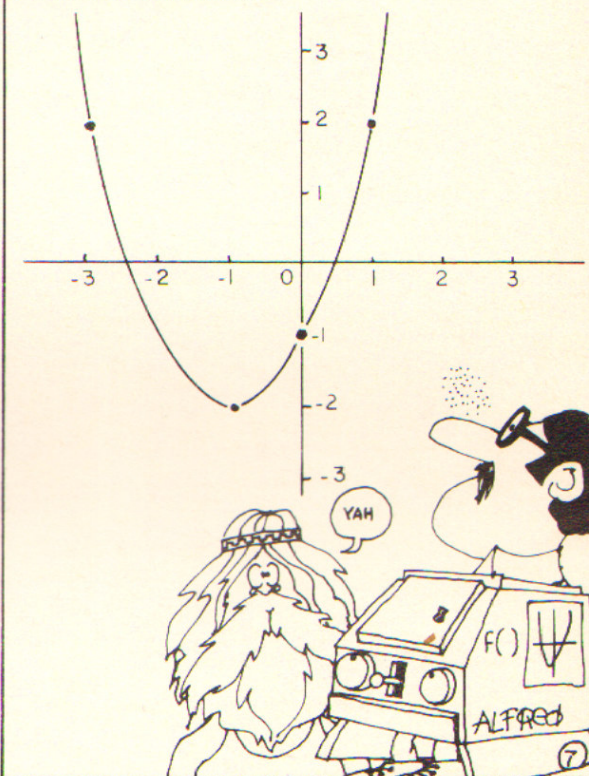
Sistemiamo tutte le frecce in modo che vadano in su o in giù in linea retta e poi svoltino ad angolo retto direttamente sul codominio.



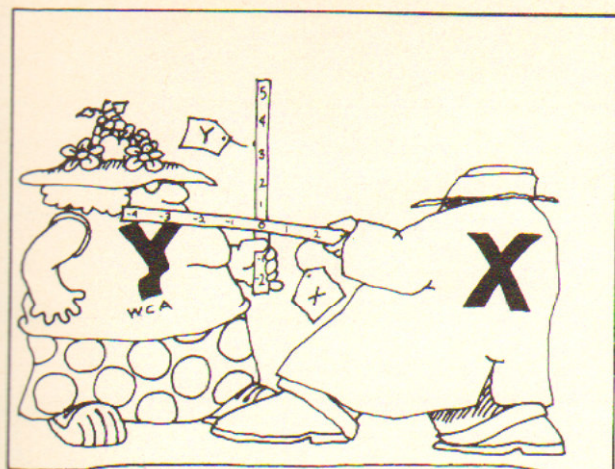
Ora possiamo avere TUTTE le informazioni sulla funzione lasciando solo i PUNTI in cui svoltano le frecce.



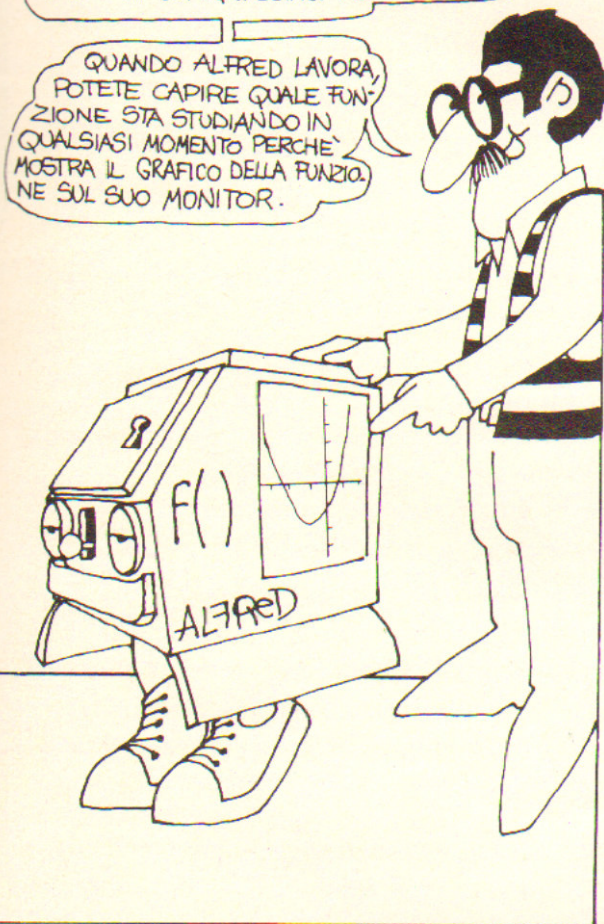
Quindi i punti ci danno tutte le informazioni sulla funzione. Generalmente ci sono molte più frecce di quelle che abbiamo mostrato e quindi molti più punti. In realtà in genere sono così tanti che i punti formano una curva ininterrotta. Sarebbe veramente difficile mostrare l'andamento di questa funzione usando solo frecce che vanno dall'insieme dominio all'insieme-codominio.



Ricordatevi che il DOMINIO di tutte le funzioni è sempre parte della retta $\longleftrightarrow$ orizzontale, detta "asse x" perché un qualsiasi elemento dell'insieme dominio è generalmente chiamato "x". Il CODOMINIO è sempre parte della retta verticale ($\updownarrow$), detta "asse y" perché un qualsiasi elemento dell'insieme-codominio viene generalmente chiamato "y".

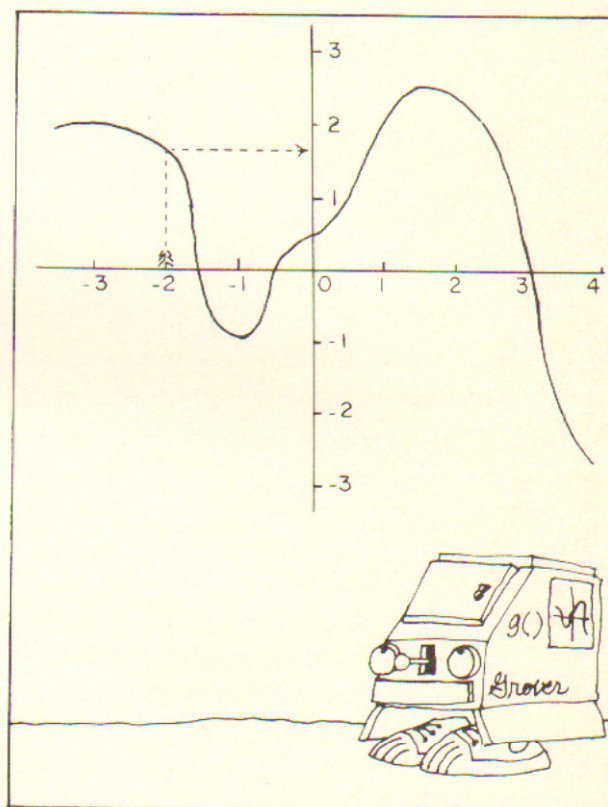


L'INTERO DISEGNO - I DUE ASSI E I PUNTI - E' DETTO
GRAFICO DI $f()$.
 IL GRAFICO RIASSUME IL COMPORTAMENTO DI UNA QUALSIASI FUNZIONE.



QUANDO ALFRED LAVORA, POTETE CAPIRE QUALE FUNZIONE STA STUDIANDO IN QUALSIASI MOMENTO PERCHE' MOSTRA IL GRAFICO DELLA FUNZIONE SUL SUO MONITOR.

Così, se abbiamo il grafico di qualche altra funzione $g()$ (tanto per cambiare), allora per "studiare $g()$ ", cominciamo con un elemento arbitrario del dominio di $g()$, diciamo -2 , (sull'asse x) e saliamo (o scendiamo) fino al punto della curva che incontra la freccia che parte da -2 , e poi sull'asse y per vedere quale numero del codominio di $g()$ è $g(-2)$.

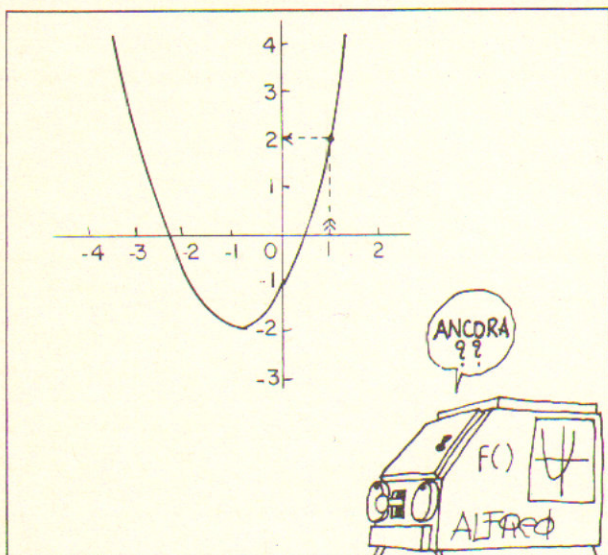


Troviamo che $g(-2)$ è circa $5/3$.

Adesso provate voi con qualche valore ?

$g(-1) =$	?	$g(0) =$	?
$g(1/2) =$	?	$g(3) =$	?
$g(?) =$	-2	$g(?) =$	0
$g(?) =$	2	$g(??) =$	2
$g(???) =$	2		

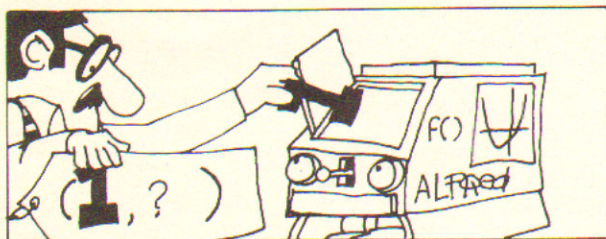
Ora, torniamo al grafico di $f(\)$ che Mc Squared ha costruito:



Spesso i matematici indicano un punto di un grafico con una particolare coppia di numeri

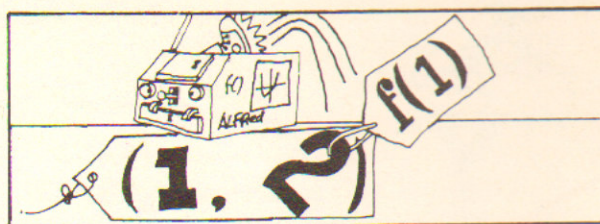


Per vedere come si può completare l'etichetta, ricordiamo che ogni punto rappresenta il posto in cui una freccia della funzione, che proviene da qualche elemento dell'insieme-codominio, cambia direzione, come la freccia da 1 a 2. Usiamo un numero qualsiasi del dominio di $f(\)$ da cui proviene la freccia come primo numero, quindi inseriamo questo numero nella macchina per funzioni

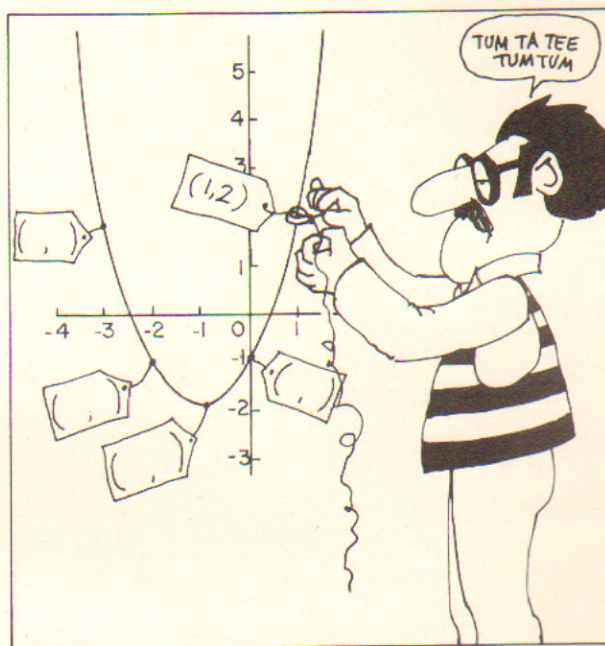


per trovare il numero del codominio di $f(\)$ sull'asse y verso cui va la freccia

e usiamo questo numero per completare l'etichetta



che viene così assegnata al punto.

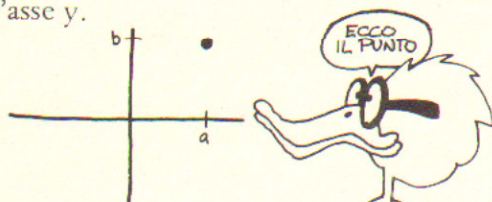


Cercate di completare le etichette degli altri punti.

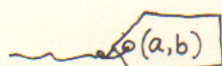
Riassumendo, possiamo trovare un'etichetta per un qualsiasi punto del grafico di una funzione:

1. Il primo numero dell'etichetta è il numero da cui parte la freccia corrispondente del dominio. Questo numero rappresenta una distanza lungo l'asse x e
2. Il secondo numero è il numero del codominio verso cui va la freccia e rappresenta una distanza lungo l'asse y.

Naturalmente, anche se un punto del piano individuato dall'asse x e dall'asse y non appartiene al grafico della nostra funzione, possiamo dargli un'etichetta. Ogni punto di questo piano deve trovarsi direttamente al disopra (o al disotto) di un numero "a" dell'asse x e direttamente a destra (o a sinistra) di un numero "b" dell'asse y .



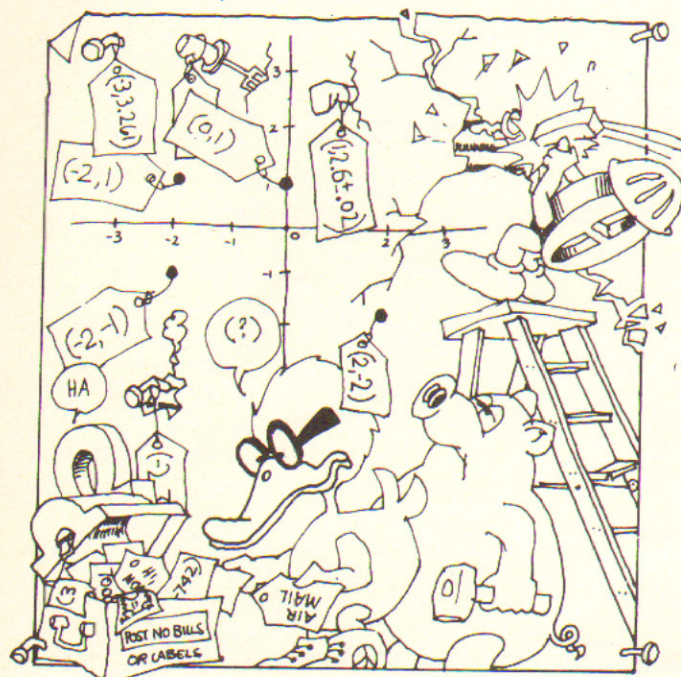
Con questi due numeri "a" e "b" possiamo formare un'etichetta



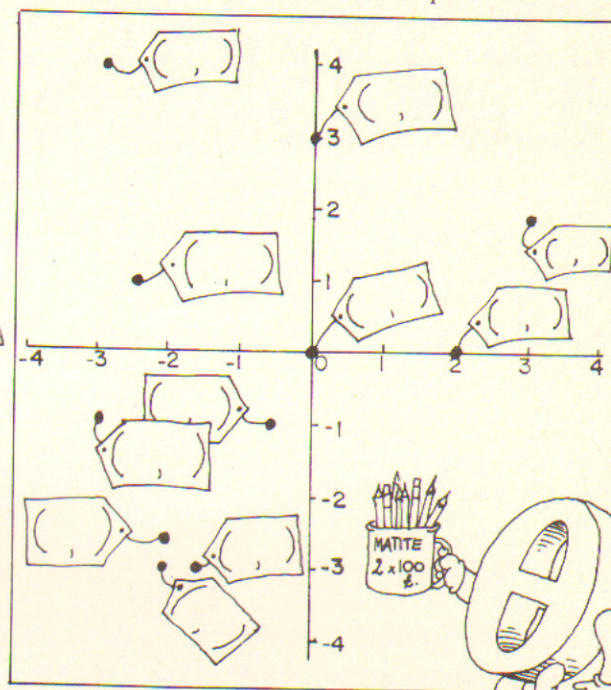
che è il nome ufficiale del punto.

"a" è detto "coordinata x del punto" e
"b" è detto "coordinata y del punto".

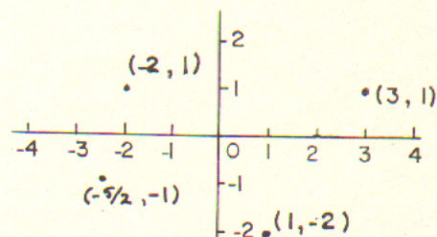
Qui diamo un esempio di alcuni punti con le loro etichette.



Provate a etichettare alcuni altri punti.



In realtà i veri e propri Simboli Ufficiali non sono scritti su un'etichetta: i matematici scrivono semplicemente le coppie di numeri il più vicino possibile al punto, così:



Un simbolo sull'etichetta, come $(-2, 1)$, sembra lo stesso usato per designare un segmento dell'asse reale, come

$$(-2, 1) = \{x \mid x \in \mathbb{R}; -2 < x < 1\}$$

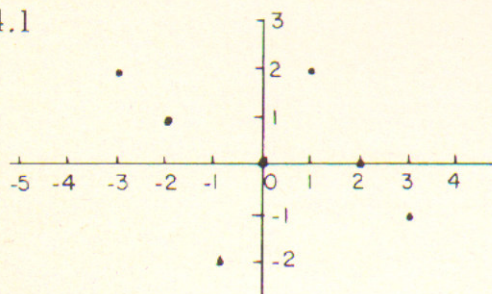
ma l'etichetta non ha niente a che vedere con questi segmenti. Dovrete capire dal contesto il senso in cui viene inteso il simbolo; generalmente è molto semplice.

ESERCIZI



Le risposte alla maggior parte di questi esercizi in realtà sono solo delle approssimazioni, poiché dipendono dalla lettura dei grafici.

I.4.1



(a) Date un'etichetta ai punti.

(b) Se i punti rappresentano una funzione, trovate

$$f(3) = ?$$

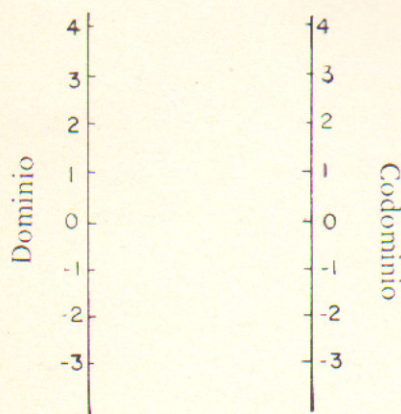
$$f(-3) = ?$$

$$f(1) = ?$$

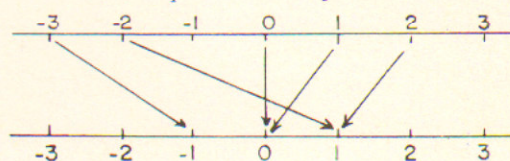
$$f(2) = ?$$

$$f(0) = ?$$

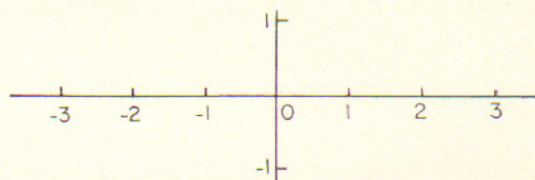
(c) Disegnare le frecce che indicano la corrispondenza tra elementi del dominio e elementi del codominio in questa funzione.



1.4.2 Se $f(\)$ è questa corrispondenza;



tracciate il suo grafico e date un'etichetta ai punti del grafico. (Sono solo 5 punti.)



1.4.3 Se il dominio di $f(\)$ è

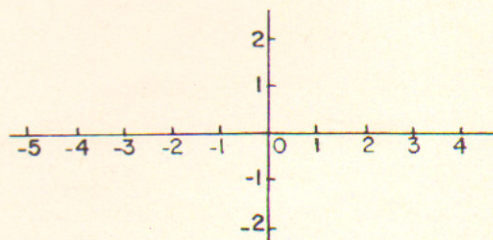
$$\{-1, 0, \frac{1}{2}, 2, 3\}$$

e $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$, $f(1/2) = 1$, $f(2) = -2$ e $f(3) = -2$,

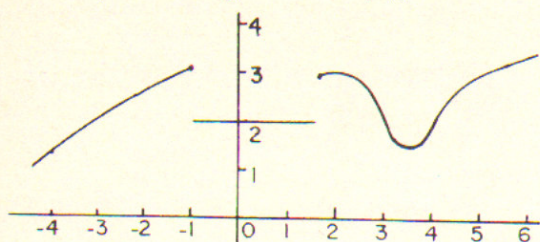
(a) Disegnare le frecce che indicano la corrispondenza tra elementi del dominio e elementi del codominio.



(b) Disegnare il grafico di $f(\)$. (Sono solo 5 punti.)



1.4.4 Se questo è il grafico di $f(\quad)$,



trovare

(a) $f(2) = ?$

(b) $f(-2) = ?$

(c) Se x è un numero arbitrario in

$$(0, 1) = \{x \mid x \in \mathbb{R}; 0 < x < 1\},$$

trovare $f(x) = ?$

(d) $f(?) = 3$

(e) $f(?) = 5/2$

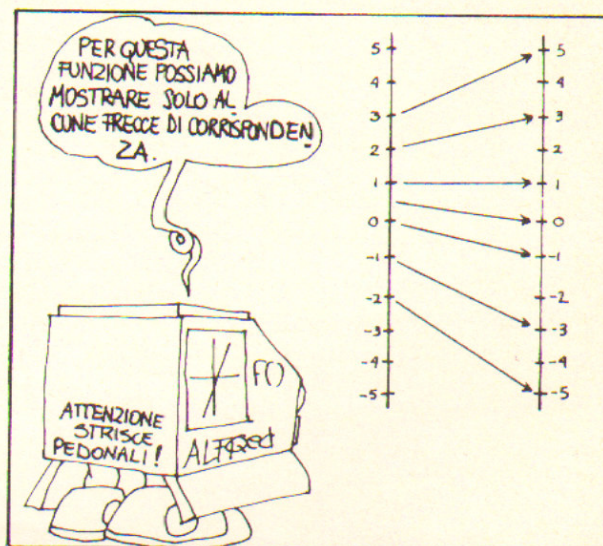
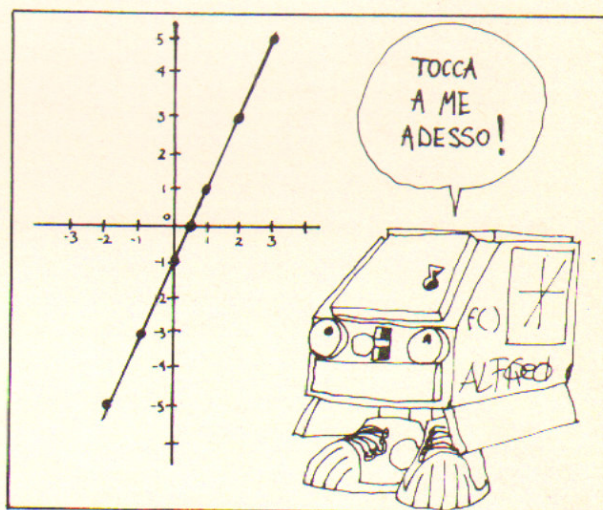
(f) $f(?) = 2$.

I sacchetti (insiemi), le frecce e le macchine per funzioni ci forniscono un apparato logico sufficiente per descrivere il tipo di relazioni che possono essere rappresentate su un grafico.



Ma, finora, abbiamo soltanto il grafico di una funzione che ci dice quale risultato corrisponde a un dato stimolo. I grafici non forniscono risultati sufficientemente precisi e i calcolatori non possono usarli nei loro calcoli.

Fortunatamente per molte funzioni utili si può usare una precisa ricetta ALGEBRICA per trovare il risultato esatto che corrisponde ad un dato stimolo. Per esempio, supponiamo che Alfred stia studiando una funzione con questo grafico:





Controlliamo alcuni altri valori: usando il grafico della funzione possiamo vedere che

$$\begin{aligned} 3 &= f(2) \\ 1 &= f(1) \\ -3 &= f(-1) \\ 0 &= f(1/2). \end{aligned}$$

Se usiamo la nostra formula invece del grafico otteniamo:

$$\begin{aligned} f(2) &= 2 \cdot (2) - 1 = 4 - 1 = 3 \\ f(1) &= 2 \cdot (1) - 1 = 2 - 1 = 1 \\ f(-1) &= 2 \cdot (-1) - 1 = -2 - 1 = -3 \\ f(1/2) &= 2 \cdot (1/2) - 1 = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

e questo concorda con i risultati ottenuti partendo dal grafico !

Questo è molto utile! Vedremo fra un momento che ogni funzione il cui grafico è una retta può essere descritta da una formula semplice come quella per

$$f(\quad) = 2 \cdot (\quad) - 1.$$

Quando possiamo trovare per una funzione una formula comoda come questa, la usiamo spesso al posto di " $f(\quad)$ " come simbolo per la funzione. Queste espressioni simboliche spesso sono scritte con " x " negli spazi vuoti, ad esempio

$$f(x) = 2 \cdot (x) - 1 = 2x - 1$$

oppure

$$y = f(x) = 2x - 1$$

dal momento che queste formule forniscono la regola per trovare il numero " y " sull'"asse y " che corrisponde ad un particolare valore di " x " sull'"asse x ".



Ma, fortunatamente, useremo per lo più funzioni i cui simboli danno una formula esatta per calcolare il risultato che corrisponde esattamente ad un determinato valore del co-dominio, come

$$f(\quad) = 2(\quad) - 1 \text{ (oppure } y = f(x) = 2x - 1).$$

Qui ci sono alcuni membri semplici ma importanti della famiglia delle funzioni che hanno per grafico una retta.

1. La FUNZIONE "COSTANTE":

(in questo caso la costante è "1")

Espressione simbolica:

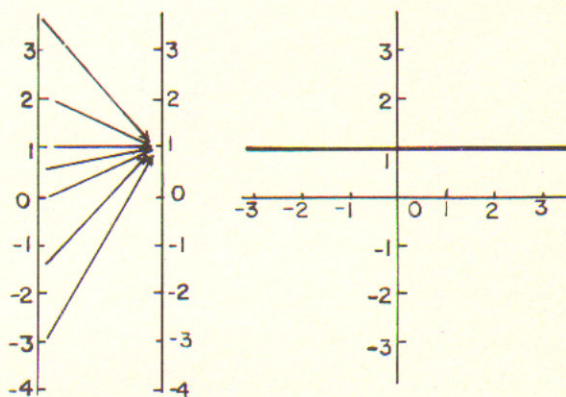
$$f(\quad) = 1 \text{ (oppure } y = f(x) = 1).$$

Alcune frecce

Grafico:

di

corrispondenza:

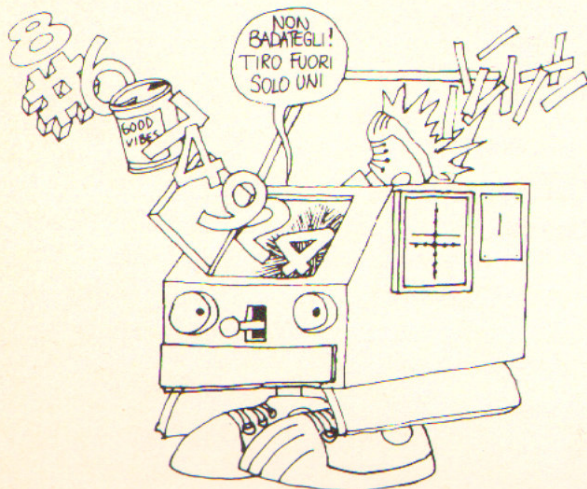


Applicando la formula ad alcuni valori si ha:

$$f(2) = 1; f(1) = 1; f(3/5) = 1;$$

$$f(0) = 1; f(-3) = 1$$

dal momento che il risultato fornito dalla macchina per funzioni è SEMPRE UNO.



2. La FUNZIONE "IDENTITÀ".

Espressione simbolica:

$$f() = () \text{ (oppure } y = f(x) = x).$$

Alcune frecce
di

corrispondenza:

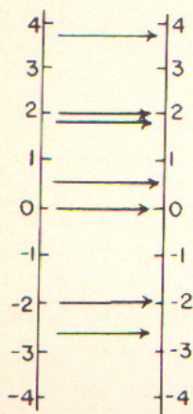
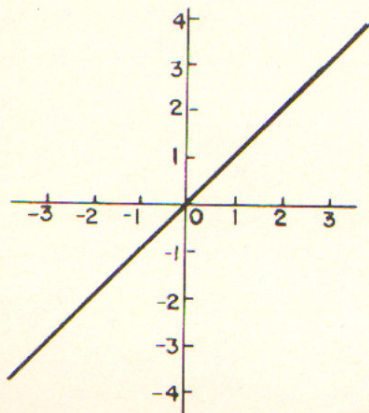


Grafico:

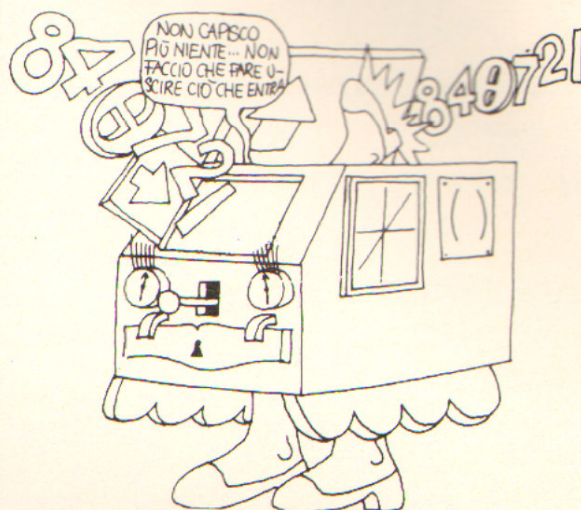


Applicando la formula ad alcuni valori si ha:

$$f(2) = (2) = 2; f(-52) = (-52) = -52;$$

$$f(0) = (0) = 0; f(9/5) = (9/5) = 9/5,$$

dal momento che la funzione dà come risultato esattamente il valore che le è stato fornito.



3. La FUNZIONE "PRODOTTO PER UNA COSTANTE" (1/2 in questo caso)

Espressione simbolica:

$$f() = 1/2 \cdot ()$$

$$(y = 1/2 x).$$

Alcune frecce
di

corrispondenza:

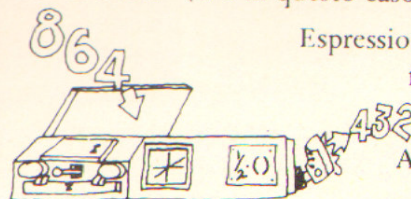
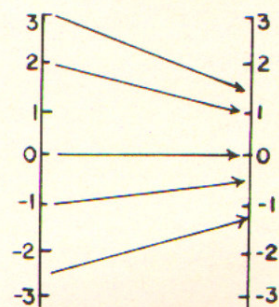
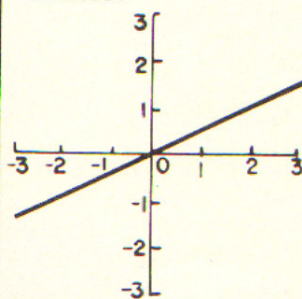


Grafico:



Applicando la formula ad alcuni valori si ha:

$$f(3) = 1/2 \cdot (3) = 3/2; f(-4) = 1/2 \cdot (-4) = -2;$$

$$f(0) = 1/2 \cdot (0) = 0; f(7/3) = 1/2 \cdot (7/3) = 7/6.$$

ESERCIZI



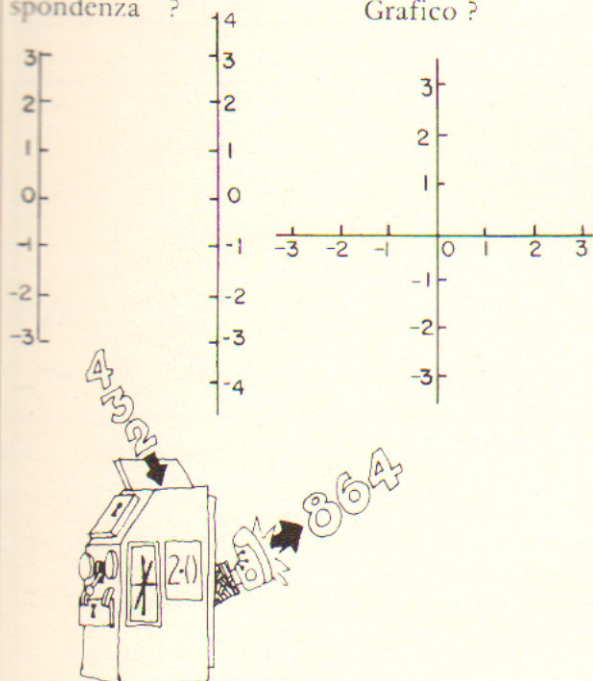
1.4.5

Espressione simbolica:

$$f(\) = 2 \cdot (\)$$

Tracciare alcune
freccie di corri-
spondenza ?

Grafico ?



1.4.6 Continua:

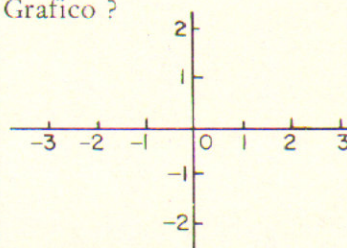
Grafico ?

Espressione

simbolica ?

$$g(\) =$$

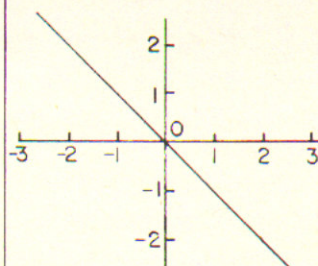
?



1.4.7

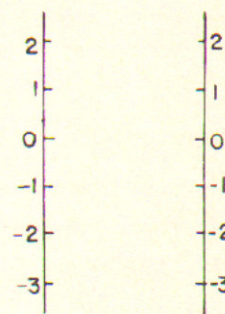
Grafico:

Tracciate alcune
freccie di corrispondenza?



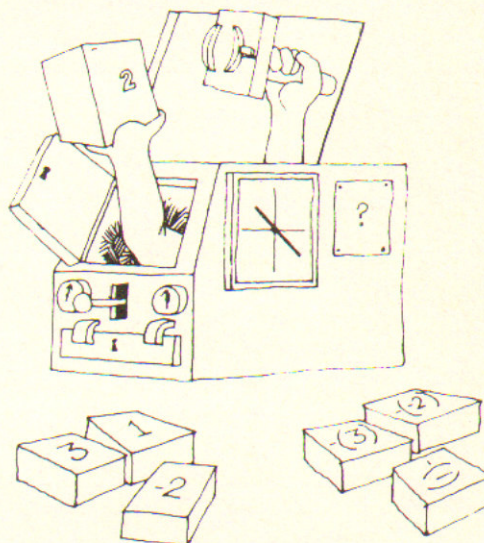
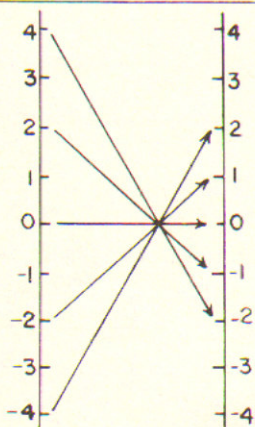
Espressione simbolica ?

$$f(\) = ?$$

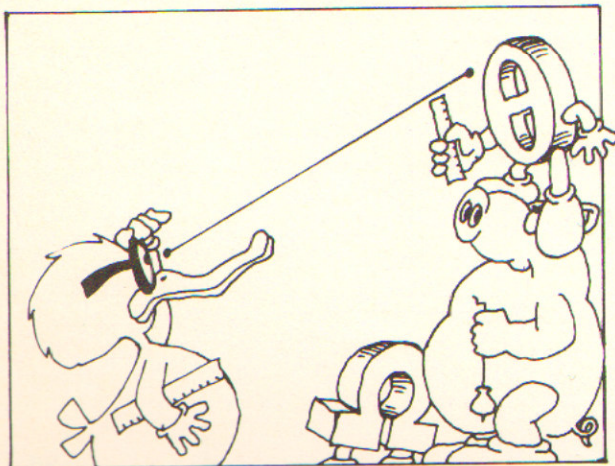


1.4.6

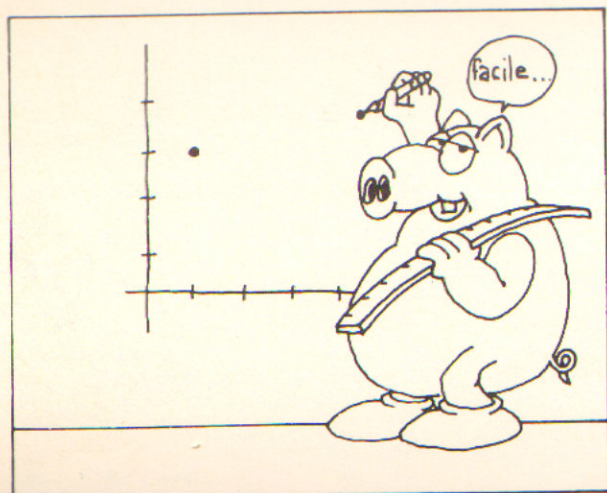
Supposto che
 $g(\)$ abbia come
grafico una retta,
queste sono
alcune frecce di
corrispondenza di
 $g(\)$.



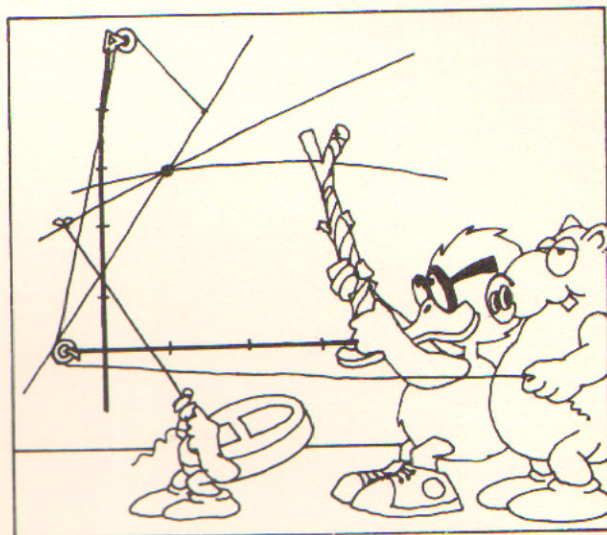
1.5 LINEE RETTE



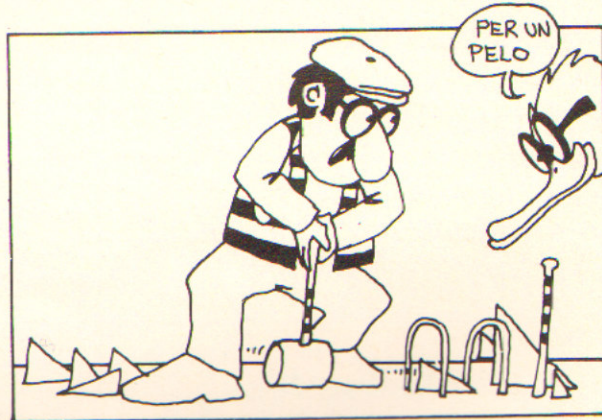
Se una funzione ha un grafico che è una retta, adesso vogliamo trovare una formula che descriva esattamente il comportamento della funzione. Le linee rette, rinomate per la loro proprietà di essere il cammino più breve tra due punti, in genere vengono disegnate segnando due punti che si suppone si trovino sulla retta e usando un buon righello.



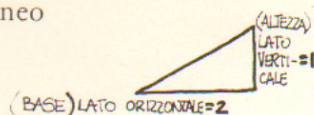
Ma per trovare la formula per una funzione che ha una certa retta come grafico, è opportuno tornare indietro per un momento e studiare il problema della costruzione di una retta supposto che all'inizio si sappia soltanto che un certo punto (diciamo (1,3)) si trova sulla retta. Se tutto quello che abbiamo è un punto sulla retta, quale sarà la direzione della retta? Sarà ripida o meno? Punterà a destra o a sinistra? Ci sono molti metodi per puntellare le rette per dargli una direzione ben definita.



Il metodo del prof. McSquared si avvale di speciali cunei triangolari con un angolo retto.

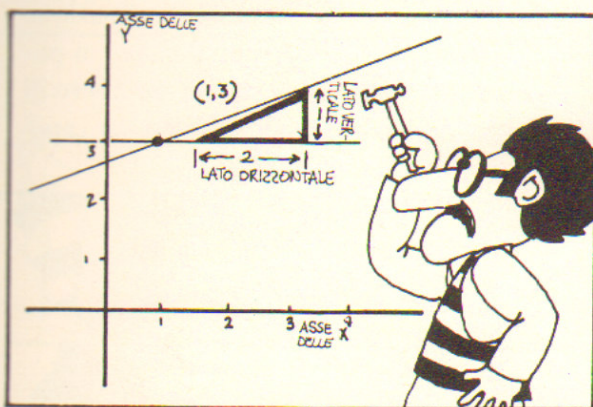


Cercando di ottenere una certa retta, McSquared prende il cuneo

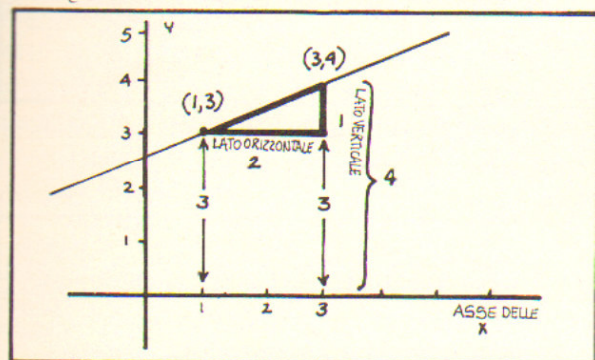


con la base parallela all'asse x e lunga 2, e l'altezza parallela all'asse y e lunga 1.

Quindi spinge il cuneo da destra finché la sua punta non raggiunge il punto (1,3).



Ora McSquared ha ottenuto la retta che cercava: quella adagiata sul lato inclinato del cuneo triangolare.



Una volta che il cuneo è al suo posto e la retta è sistemata nella direzione voluta, le cose sono un po' più sicure. Ad esempio, possiamo individuare un altro punto della retta guardando dove viene a trovarsi il vertice superiore



del triangolo. Questo si trova sopra all'asse x in un punto che possiamo calcolare in questo modo:

$$\left(\begin{array}{c} \text{COORDINATA - X} \\ \text{DEL PUNTO ORIGINARIO} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{LUNGHEZZA} \\ \text{DELLA BASE} \end{array} \right) =$$

$$1 + 2 = 3$$

e per l'altezza possiamo eseguire questo calcolo:

$$\left(\begin{array}{c} \text{COORDINATA - Y} \\ \text{DEL PUNTO ORIGINARIO} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{LUNGHEZZA} \\ \text{DELL'ALTEZZA} \end{array} \right) =$$

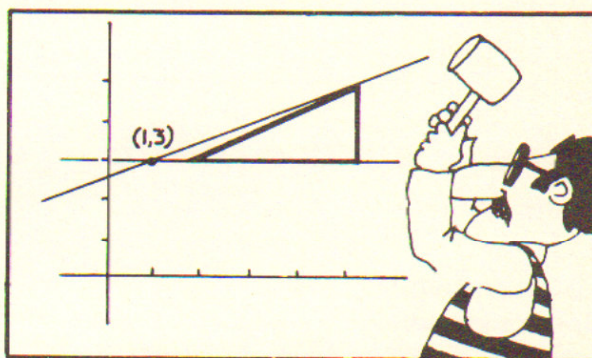
$$3 + 1 = 4$$

Così (3,4) è un altro punto sulla retta.

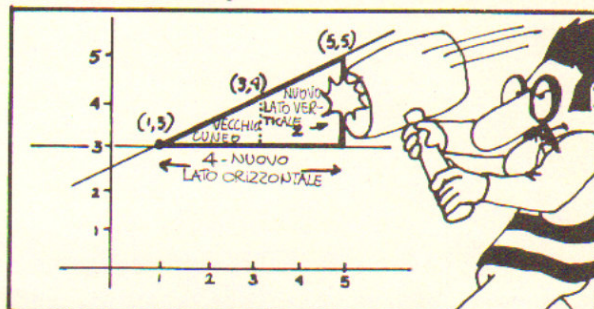
La retta mantiene la stessa direzione anche se il prof. McSquared prende un cuneo più grande con la forma di un triangolo simile al precedente ma con i lati lunghi il doppio, cioè,

(nuova altezza) = 2 · (vecchia altezza) = 2 · 1 = 2
e

(nuova base) = 2 · (vecchia base) = 2 · 2 = 4,



e lo mette al suo posto.



Il motivo per cui la retta avrà la stessa direzione è che il cuneo si sovrappone esattamente alla punta del nuovo cuneo più grande - il lato obliquo del vecchio triangolo si troverà sul lato obliquo del nuovo triangolo.

I matematici cercarono un modo di precisare la nozione di "direzione" di una certa retta indipendentemente da quale di questi cunei simili viene usato per sostenerla. Bisognava trovare un modo che sfruttasse il fatto che i lati del nuovo cuneo sono esattamente il doppio della lunghezza dei lati del vecchio cuneo liberandosi così del fattore 2 che esprime "il doppio di". Questo è il caso della

frazione $\frac{\text{altezza}}{\text{base}}$ che si calcola in questo modo:

$$\frac{2}{4} = \frac{(\text{NUOVA ALTEZZA})}{(\text{NUOVA BASE})} = \frac{2 \cdot (\text{VECCHIA ALTEZZA})}{2 \cdot (\text{VECCHIA BASE})} = \frac{(\text{VECCHIA ALTEZZA})}{(\text{VECCHIA BASE})} = \frac{1}{2}$$

Il "fattore di scala" 2 si semplifica e ci dà l'equazione

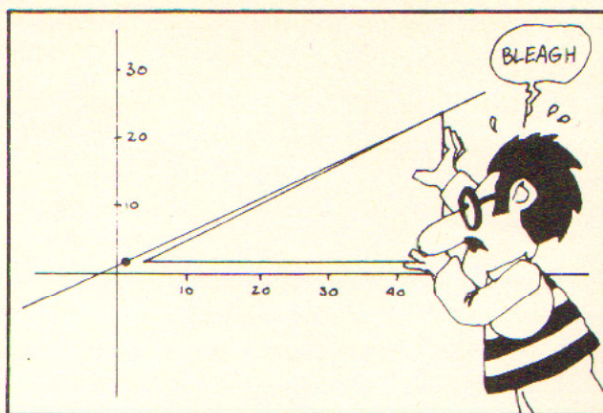
$$\frac{1}{2} = \frac{\text{vecchia altezza}}{\text{vecchia base}} = \frac{\text{nuova altezza}}{\text{nuova base}}$$

Questo sistema funziona sempre comunque vari proporzionalmente il cuneo, sia che aumenti sia che diminuisca la lunghezza dei suoi lati. Fin quando i triangoli sono simili (ovvero proporzionali) il fattore di scala si semplificherà formando il rapporto

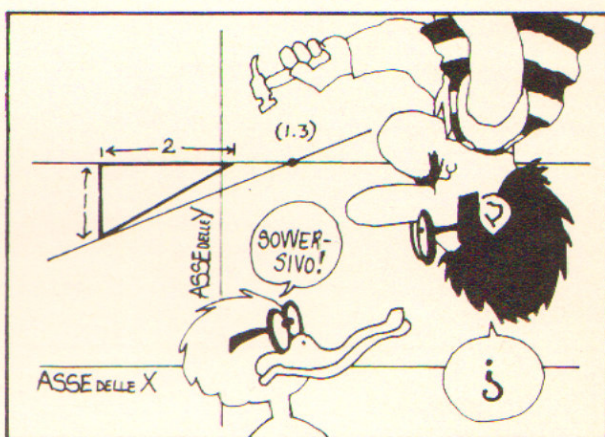
$$\frac{\text{altezza}}{\text{base}}$$

e otterremo ogni volta la stessa frazione.

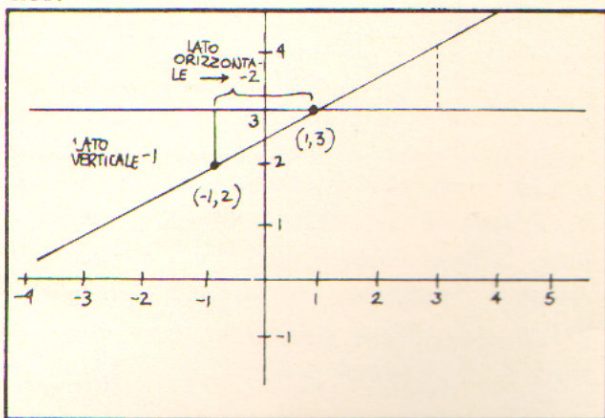
Questo rapporto è chiamato RAPPORTO INCREMENTALE ed è la chiave per trovare una formula per la retta: difatti ne esprime la pendenza che si chiama coefficiente angolare.



Controlliamo questo fatto dell'inclinazione con un altro cuneo: ribaltiamo il cuneo di prima in modo che lo stesso vertice sia libero di avvicinarsi da sinistra e il triangolo sia capovolto



e spingiamolo in modo che la retta sia adagiata come al solito sul lato obliquo del cuneo.

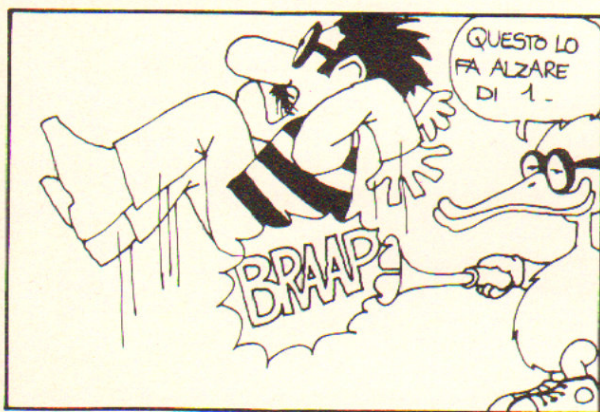


La "base" in questo nuovo triangolo ribaltato è considerata negativa dal momento che il triangolo partendo dal punto (1,3) si sposta all'indietro (verso sinistra).

Inoltre, dal momento che il triangolo non "sale" ma "scende", la lunghezza del lato verticale è considerata anch'essa negativa.

Così, in questo caso, la "nuova base" = $(-1) \cdot (\text{VECCHIO LATO ORIZZONTALE}) = (-1) \cdot (2) = -2$ e la

"nuova altezza" = $(-1) \cdot (\text{VECCHIO LATO VERTICALE}) = (-1) \cdot (1) = -1$.



La retta avrà ancora la stessa direzione, dal momento che il "triangolo ribaltato" è proporzionale agli altri. La definizione di rapporto incrementale è ancora valida dato che i matematici hanno deciso di misurare i lati del nuovo triangolo rovesciato in questo modo.

(-1) (lati del triangolo originale) e facendo i calcoli abbiamo

$$\frac{(\text{nuova altezza})}{(\text{nuova base})} = \frac{-1}{-2} = \frac{(-1) \cdot (1)}{(-1) \cdot (2)} = \frac{(-1) \cdot (\text{vecchia altezza})}{(-1) \cdot (\text{vecchia base})} = \frac{\text{vecchia altezza}}{\text{vecchia base}} = \frac{1}{2}$$

Il fattore "-1" si semplifica come al solito.

Finalmente possiamo segnare un altro punto sulla retta - dal grafico si vede che è il pun-

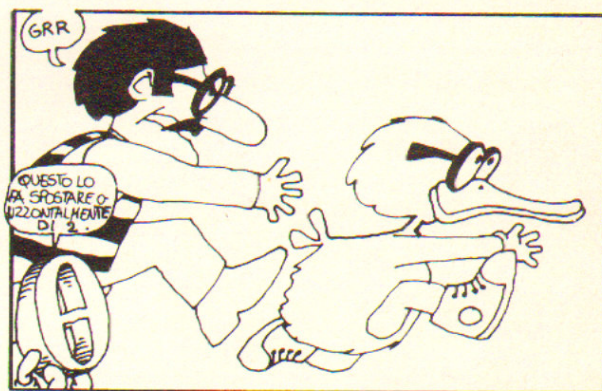
to $(-1,2)$, determinato in questo modo: la sua posizione al disopra dell'asse x si calcola così:

$$\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{c} \text{COORDINATA X DEL} \\ \text{VECCHIO PUNTO} \end{array} \right) & + & \left(\begin{array}{c} \text{LUNGHEZZA DEL} \\ \text{NUOVO LATO} \\ \text{ORIZZONTALE} \end{array} \right) = \\ (1) & + & (-2) = -1 \end{array}$$

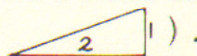
e la sua altezza in questo modo:

$$\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{c} \text{COORDINATA Y DEL} \\ \text{VECCHIO PUNTO} \end{array} \right) & + & \left(\begin{array}{c} \text{LUNGHEZZA DEL} \\ \text{NUOVO LATO} \\ \text{VERTICALE} \end{array} \right) = \\ (3) & + & (-1) = 2 \end{array}$$

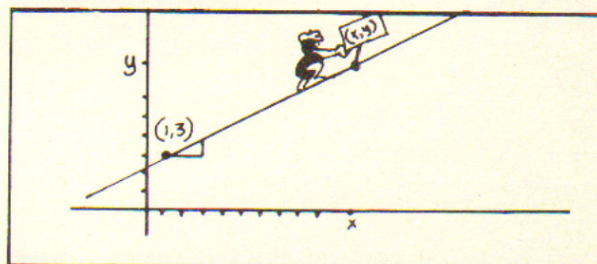
Questi calcoli danno il nuovo punto $(-1,2)$.

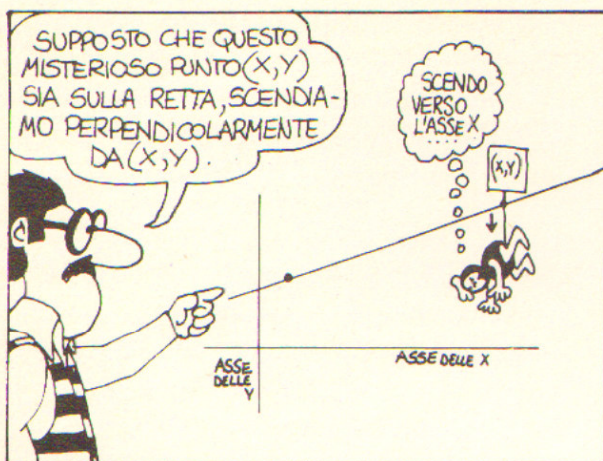


Adesso possiamo ricavare una formula più generale per trovare qualsiasi punto di questa retta. (Ricordate - la retta passa per il punto (1,3) ed è sostenuta a destra dal primo cuneo

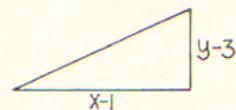


Prendete un qualsiasi punto della retta e per il momento chiamatelo (x,y) . Vogliamo trovare la relazione tra x e y .

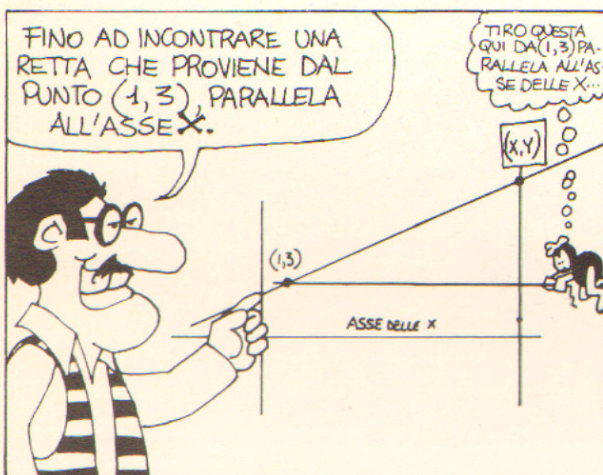
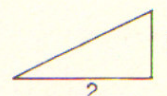




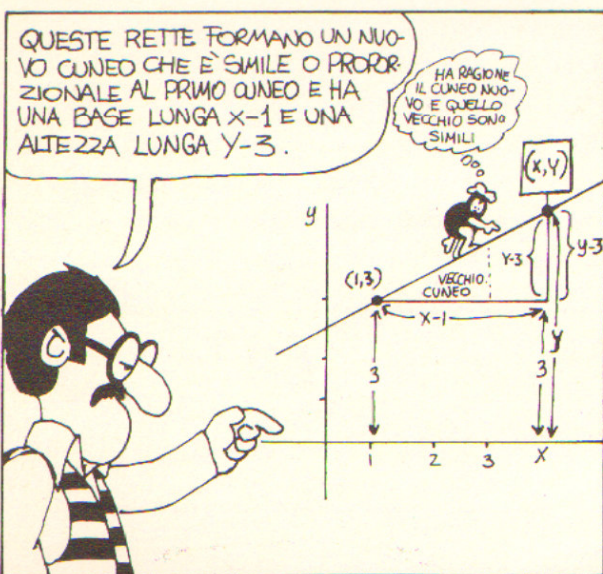
Ora essere "simili" o "proporzionali" significa che le lunghezze dei lati del nuovo triangolo



sono multipli delle lunghezze dei lati del vecchio triangolo



secondo lo stesso fattore di scala per la base e l'altezza ad esempio "il doppio" oppure "la metà".





In modo un po' più preciso: moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione per (x - 1);

$$\frac{y-3}{x-1} \cdot (x-1) = \frac{1}{2} \cdot (x-1)$$

e semplifichiamo "(x - 1)" (possiamo farlo anche se non conosciamo "(x - 1)", purché non sia 0). Otteniamo allora

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 1) \quad \text{ovvero}$$

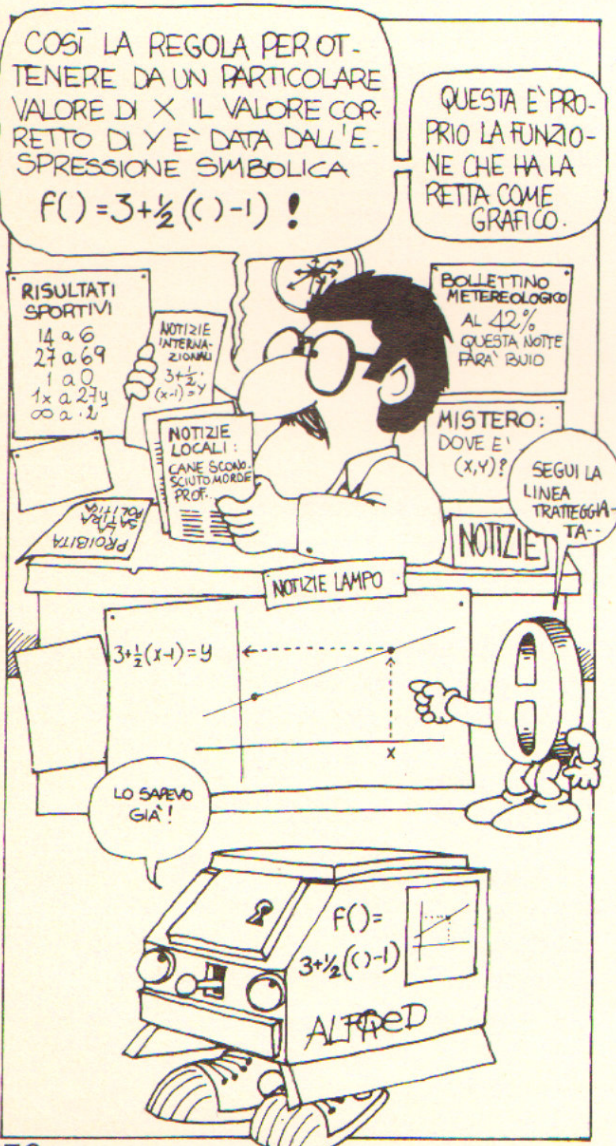
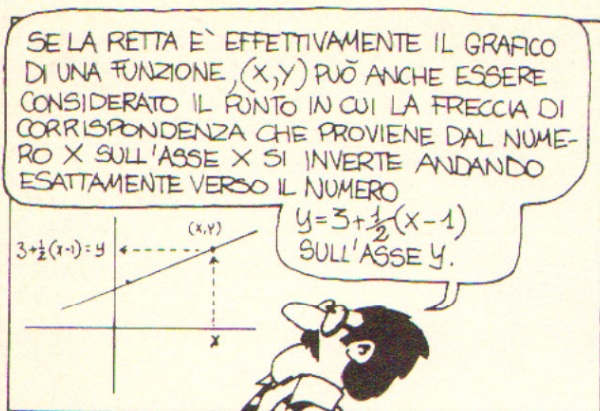
$$(\text{sommando } 3) \quad y = 3 + y - 3 = 3 + \frac{1}{2}(x - 1)$$

ovvero

$$y = 3 + \frac{1}{2}(x - 1)$$

Per ogni x fissato, la formula ci dice quale valore deve assumere y affinché il punto (x,y) sia sulla retta. Usando i cunei, abbiamo visto che il punto (3,4) è sulla retta, così quando applichiamo la formula ad x=3 dovremmo ottenere 4:

$$y = 3 + \frac{1}{2}(3 - 1) = 3 + \frac{1}{2}(2) = 4; \text{ corrisponde!}$$



In realt  non abbiamo dimostrato completamente questo fatto: tutti i ragionamenti valevano solo per punti (x,y) sulla retta a destra del punto $(1,3)$. Se volessimo trovare una formula per punti sulla retta a sinistra di $(1,3)$ otterremmo la stessa espressione, ma per evitare la noiosa dimostrazione ci limitiamo ad affermare che si pu  controllare la sua validit  "in modo simile", come usano dire i matematici per sbrigarsela.

Quindi nella formula per la retta

$$y = 3 + \frac{1}{2}(x-1) : \text{COEFFICIENTE ANGOLARE} = \frac{1}{2},$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{COORDINATA } x \\ \text{DEL PUNTO ORI-} \\ \text{GINARIO} \end{array} \right) = 1, \text{ E } \left(\begin{array}{l} \text{COORDINATA } y \\ \text{DEL PUNTO} \\ \text{ORIGINARIO} \end{array} \right) = 3,$$

POSSIAMO SCRIVERE LA FORMULA COME SUPER-FORMULA

$$Y = \left(\begin{array}{l} \text{COORDINATA } y \\ \text{DEL PUNTO} \\ \text{ORIGINARIO} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{COEF.} \\ \text{ANG.} \end{array} \right) \cdot \left(X - \left(\begin{array}{l} \text{COORDINATA } x \\ \text{DEL PUNTO} \\ \text{ORIGINARIO} \end{array} \right) \right)$$

RICORDATELA

Il ragionamento che abbiamo usato porter  sempre a questa SUPER-formula per qualsiasi coefficiente angolare o punto iniziale scelti! Cos  la super-formula ci d  un metodo per trovare la formula per una retta conoscendo soltanto un punto sulla retta e il suo coefficiente angolare: basta inserire le informazioni nella super-formula.

Questa super-formula   conosciuta sotto il nome di

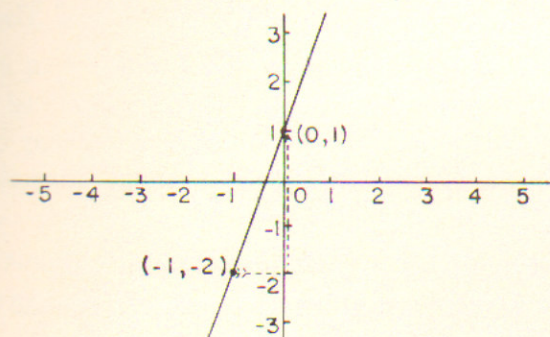
"FORMULA DEL PUNTO/COEFF. ANGOLARE PER LINEE RETTE".

Qui di seguito diamo svariati tipi di esercizi sulle rette. Alcuni di essi sono in parte svolti per facilitarvi il compito.

ESERCIZI



1.5.1 Tracciare la retta che passa per il punto $(-1, -2)$ con coefficiente angolare 3 e trovare la formula della funzione che ha per grafico la retta



Risposta: è facile trovare la formula; basta inserire il punto $(-1, -2)$ e il coefficiente angolare 3 nella super-formula

$$y = (-2) + (3) \cdot (x - (-1))$$

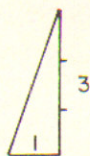
ovvero $y = -2 + 3 \cdot (x + 1)$.

Poi trasformiamolo nella formula di una funzione:

$$f(x) = -2 + 3 \cdot (x + 1).$$

L'unica difficoltà consiste nel tracciare la retta. Ci occorre un altro punto oltre a $(-1, -2)$. Siccome il coefficiente angolare è

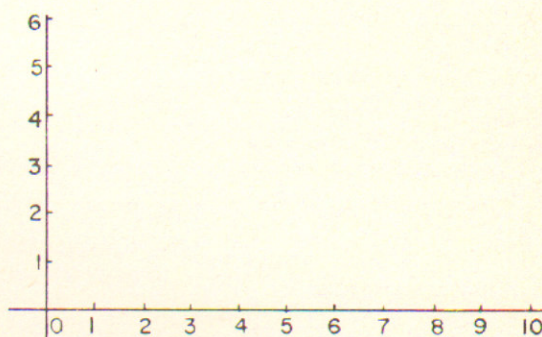
$$3 = \frac{3}{1},$$



basta usare

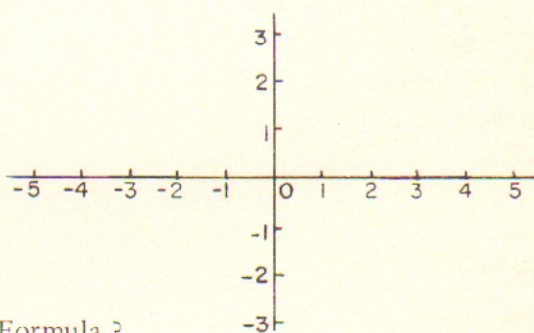
che è uno dei triangoli che individuano la retta! Contiamo 1 a partire da $(-1, -2)$ e poi 3 verso l'alto trovando il punto $(0, 1)$ che è anch'esso sulla retta e quindi disegniamola.

1.5.2 Tracciare la retta che passa per il punto $(2, 0)$ con coefficiente angolare $\frac{4}{5}$ e trovare la funzione che ha per grafico la retta.



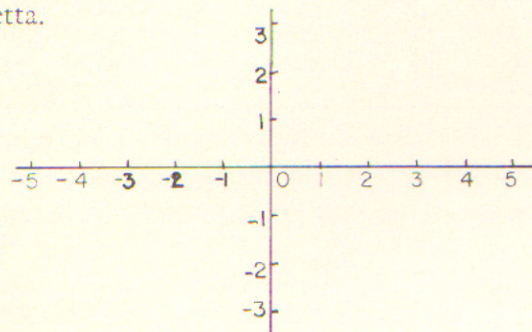
Formula ?

1.5.3 Tracciare la retta che passa per il punto $(-2, -3)$ con coefficiente angolare $1\frac{1}{5}$ e trovare la formula della funzione che ha per grafico la retta.



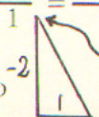
Formula ?

1.5.4 Tracciare la retta che passa per il punto (1,3) con coefficiente angolare -2 e trovare la formula della funzione che ha per grafico la retta.



Per tracciare questa retta, siccome il coefficiente angolare è uguale a:

$$\text{coeff. ang.} = -2 = \frac{-2}{1} = \frac{\text{altezza}}{\text{base}},$$

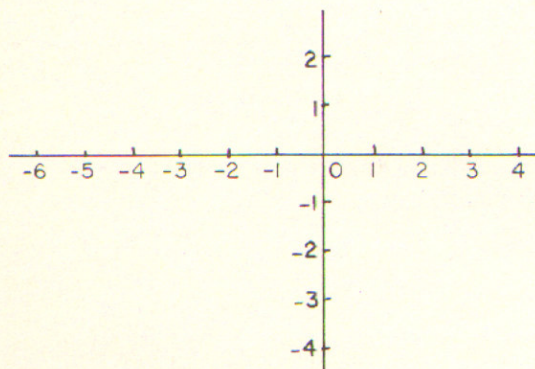
basta usare il triangolo  METTI QUESTO PUNTO SU(1,3)

per arrivare al punto (2,1) che deve trovarsi anch'esso sulla retta.

COEFFICIENTI ANGOLARI NEGATIVI INDICANO SEMPRE CHE LA RETTA SALE VERSO SINISTRA !

Formula ?

1.5.5 Tracciare la retta che passa per il punto $(-1, -\frac{3}{2})$ con coefficiente angolare $-\frac{2}{3}$ e trovare la formula della funzione che ha per grafico la retta.

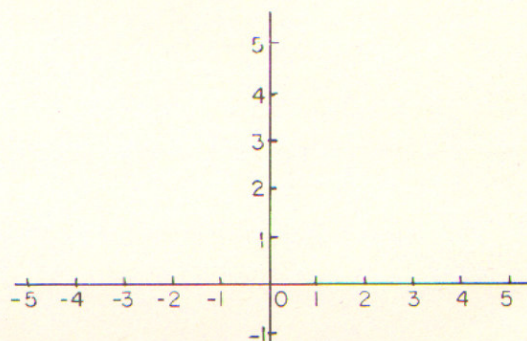


1.5.5 (continua). Formula ?

1.5.6 Tracciare la retta che ha per formula

$$y = -\frac{1}{3}x + 4.$$

Qual'è il coefficiente angolare della retta ?



Risposta: il trucco da usare è di riscrivere l'equazione in modo che abbia la stessa struttura della super-formula

$$y = \begin{pmatrix} \text{coord.} \\ y \text{ del} \\ \text{punto} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{coeff.} \\ \text{ang.} \end{pmatrix} \cdot \left(x - \begin{pmatrix} \text{coord.} \\ x \text{ del} \\ \text{punto} \end{pmatrix} \right)$$

Ora x interviene solo qui, quindi cerchiamo di trasformare l'equazione originale in modo che assomigli alla super-formula:

$$y = 4 + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (x - 0)$$

e a questo punto possiamo dedurre i dati:

$4 =$ (coordinata y del punto),

$-\frac{1}{3} = \left(-\frac{1}{3}\right) =$ coefficiente angolare, e

$0 =$ (coordinata x del punto).

Da questo otteniamo sia il punto (0,4) che il coefficiente angolare $-\frac{1}{3}$ e questo è sufficiente per tracciare la retta.

Ogni funzione del tipo

$$f(x) = m \cdot (x - 0) + b \quad (y = mx + b)$$

ha per grafico una retta, se m e b sono costanti. Se consideriamo

$$y = mx + b$$

scritta come

$$y = b + m \cdot (x - 0)$$

e la confrontiamo con la struttura della super-formula vediamo che

coeff. ang. = m = il numero che moltiplica x e il punto $(0, b)$ è sulla retta. Siccome il punto $(0, b)$ è anche sull'asse y (dove la coordinata x del punto è sempre 0), $(0, b)$ viene in genere chiamato "intersezione con l'asse y " della retta.

Notate che possiamo sempre riscrivere la formula di una retta in modo che sia del tipo

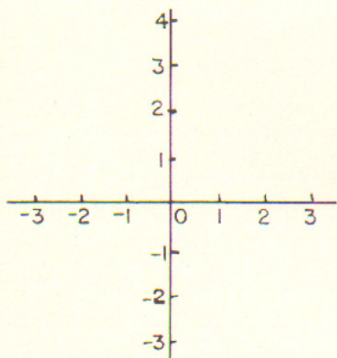
$$y = mx + b$$

riunendo tutte le costanti che non moltiplicano x in " b ".

1.5.7 Tracciare la retta descritta dalla formula

$$y = -\frac{1}{2}x + 2.$$

Qual è il suo coefficiente angolare?



Coefficiente angolare?

1.5.7 (continua)

Quando dalla formula di una funzione si capisce che il suo grafico è una retta, è molto più facile disegnare la retta trovando semplicemente due punti che le appartengono piuttosto che complicarsi la vita con le super-formule. Generalmente si scelgono alcuni valori particolari di x da usare nella formula in modo che i calcoli siano semplici e sia facile rappresentare il punto sul grafico.

In questo caso, con la formula

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

(ovvero $f(x) = -\frac{1}{2}(x) + 2$)

$x = 0$ è certamente un caso semplice, siccome, $f(0) = -\frac{1}{2} \cdot (0) + 2 = 2$, e così abbiamo un punto sulla retta:

$$(0, f(0)) = (0, 2).$$

Un altro valore "facile" di x è 2 (in previsione di semplificazioni...)

$$f(2) = -\frac{1}{2} \cdot (2) + 2 = -1 + 2 = 1$$

e otteniamo un altro punto

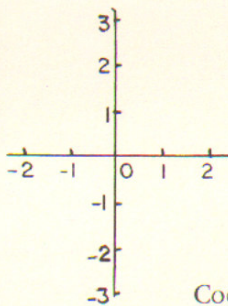
$$(2, f(2)) = (2, 1)$$

sulla retta, e adesso non ci vuole niente a disegnarla.

1.5.8 Tracciare la retta descritta dalla formula

$$y = \frac{3}{2} - 2x.$$

Qual'è il suo coefficiente angolare?

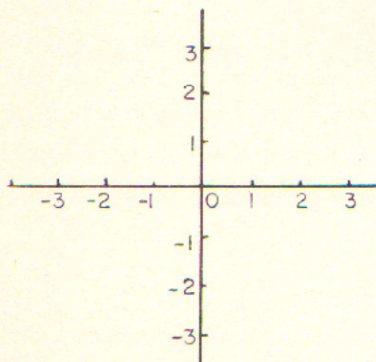


Coefficiente angolare?

1.5.9 (Difficile !) Tracciare la retta contenente i punti (x,y) che soddisfano alla formula

$$2y = 3x - 2.$$

Qual'è il suo coefficiente angolare ?

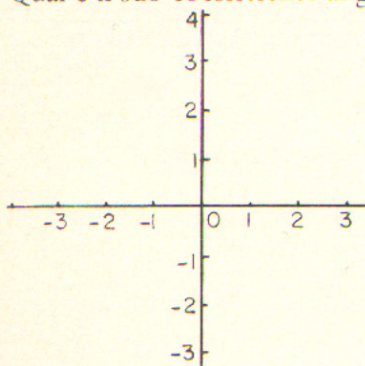


Coefficiente angolare ?

1.5.10 (Ancora più difficile !) Tracciare la retta contenente i punti (x,y) che soddisfano alla formula

$$2x = 3y - 2.$$

Qual è il suo coefficiente angolare ?



Coefficiente angolare ?

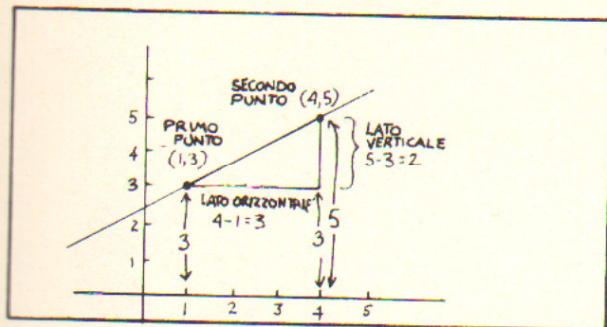
Ora torniamo al problema di trovare l'espressione simbolica per una funzione il cui grafico è una retta che passa per due punti assegnati.

Supponiamo di voler trovare la formula per la funzione che rappresenta la retta passante per i punti (1,3) e (4,5).



Per usare la super-formula basta calcolare il coefficiente angolare della retta. Questo equivale a trovare un cuneo con il vertice nel punto (1,3) e il cui lato inclinato si sovrapponga esattamente a questa retta. Allora non ci resta che sapere la lunghezza orizzontale e quella verticale di questo cuneo per conoscere il coefficiente angolare.

Ma questo è facile! Basta formare un triangolo scendendo da (4,5) parallelamente all'asse y fino ad incontrare la retta parallela all'asse x proveniente da (1,3).



Allora la "ALTEZZA" di questo triangolo si può calcolare in questo modo:

$$\begin{pmatrix} \text{COORDINATA } y \\ \text{DEL SECONDO} \\ \text{PUNTO } (4,5) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{COORDINATA } y \\ \text{DEL PRIMO} \\ \text{PUNTO } (1,3) \end{pmatrix} =$$

$$5 - 3 = 2$$

e la "BASE" di questo triangolo si può calcolare così:

$$\begin{pmatrix} \text{COORDINATA } x \\ \text{DEL SECONDO} \\ \text{PUNTO } (4,5) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{COORDINATA } x \\ \text{DEL PRIMO} \\ \text{PUNTO } (1,3) \end{pmatrix} =$$

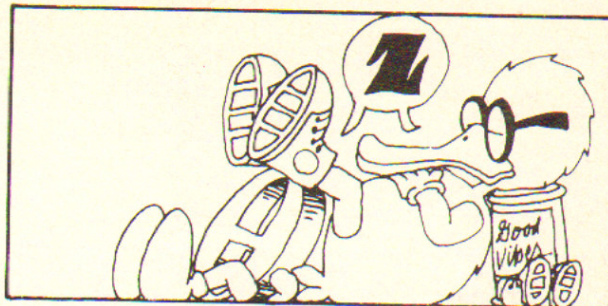
$$4 - 1 = 3$$

Quindi il coefficiente angolare è

$$\frac{\text{altezza}}{\text{base}} = \frac{2}{3}$$

Riassumendo tutto questo ragionamento, la formula generale del coefficiente angolare di una retta, se abbiamo due punti che vi appartengono, è

$$\text{COEFFICIENTE ANGOLARE} = \frac{\text{LATO VERTICALE}}{\text{LATO ORIZZONTALE}} = \frac{\begin{pmatrix} \text{COORDINATA } y \\ \text{DEL SECONDO} \\ \text{PUNTO} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{COORDINATA } y \\ \text{DEL PRIMO} \\ \text{PUNTO} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \text{COORDINATA } x \\ \text{DEL SECONDO} \\ \text{PUNTO} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{COORDINATA } x \\ \text{DEL PRIMO} \\ \text{PUNTO} \end{pmatrix}}$$



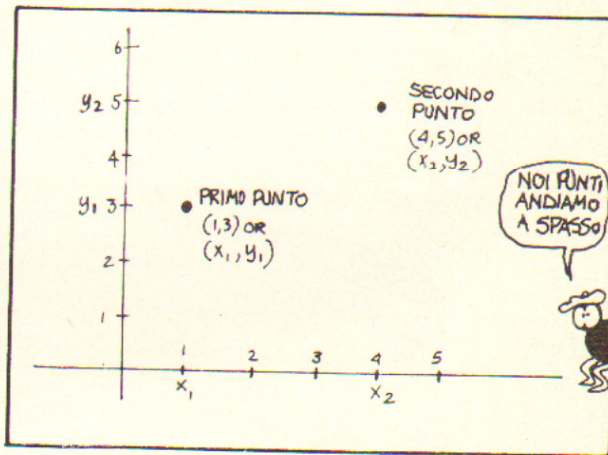
Questo è troppo lungo da scrivere, così i matematici, nella loro costante ricerca di concisione, generalmente usano alcuni simboli che semplificano molto la formula (e, purtroppo, la rendono più oscura).

Per fare questo indicano il primo punto (1,3) con " (x_1, y_1) ", usando gli indici "1".

Così $1 = x_1$ (si legge "x-uno")
e $3 = y_1$ (si legge "y-uno")

Il secondo punto (4,5) è chiamato " (x_2, y_2) ", usando gli indici "2".

Così $4 = x_2$ (x-due)
e $5 = y_2$ (y-due).



I piccoli numeri indici 1 e 2 servono a ricordarci a quale punto si riferiscono gli x e gli y.

Se usiamo questa notazione, la formula si riduce a

$$\text{COEFFICIENTE ANGOLARE} = \frac{\text{ALTEZZA}}{\text{BASE}} = \frac{\text{COORD. Y DEL 2° PUNTO} - \text{COORD. Y DEL 1° PUNTO}}{\text{COORD. X DEL 2° PUNTO} - \text{COORD. X DEL 1° PUNTO}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



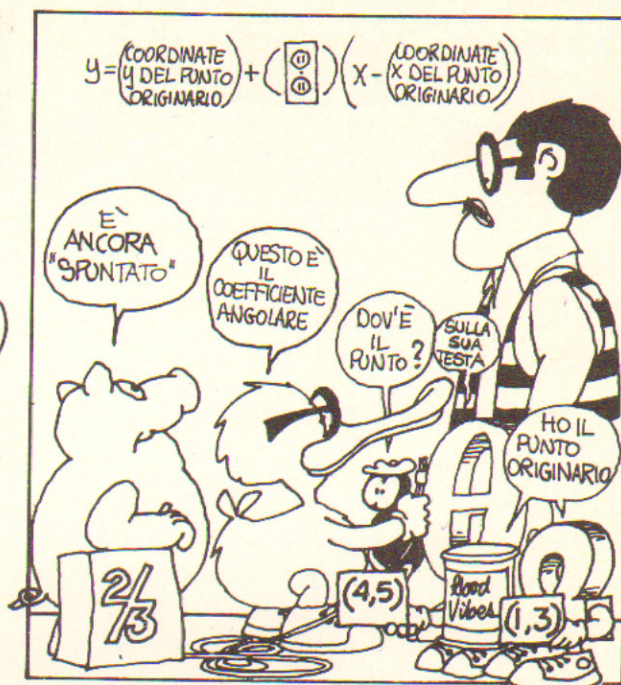
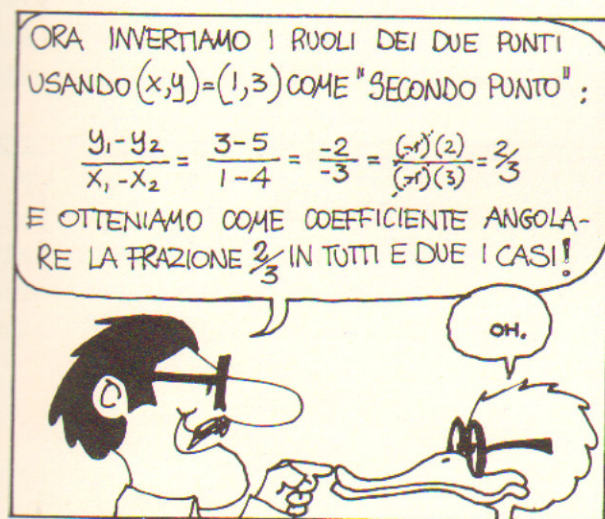
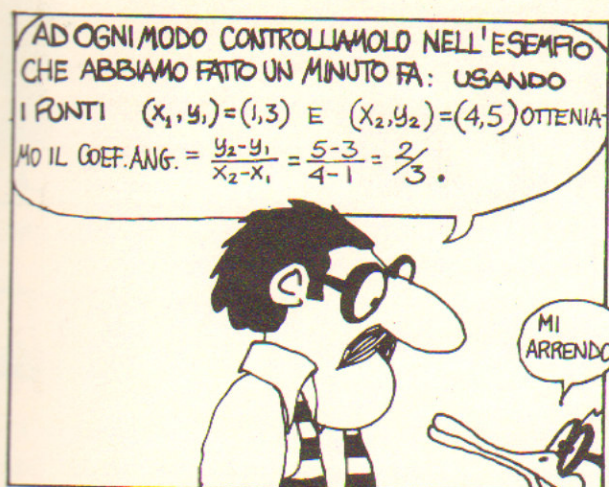
PROVIAMO A SCRIVERE LA FORMULA DOPO AVER SCAMBIATO LA POSIZIONE DEI DUE PUNTI: "y" → 1° PUNTO "y" → 2° PUNTO

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{-y_2 + y_1}{-x_2 + x_1} = \frac{(-1) \cdot (y_2 - y_1)}{(-1) \cdot (x_2 - x_1)} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

1° PUNTO "x" → x₁ - x₂
2° PUNTO "x" → x₂ - x₁

CHE È LO STESSO RISULTATO DI PRIMA!





Ma ancora una volta la difficoltà riguarda quale punto dobbiamo usare come "punto originario". Anche in questo caso si vede che non ha importanza! Se usiamo il "primo punto" $(1, 3)$ come punto originario, otteniamo, raccogliendo le costanti.

$$y = 3 + \left(\frac{2}{3}\right) \cdot (x - 1) = 3 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$$

D'altra parte, se usiamo il "secondo punto" $(4, 5)$ nel ruolo di "punto originario" abbiamo

$$y = 5 + \left(\frac{2}{3}\right) \cdot (x - 4) = 5 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$$

alla fine otteniamo la stessa formula

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$$

in tutti i due i casi! Questa non è proprio una "dimostrazione" generale che questo accada indipendentemente dalla coppia di punti scelta, ma che lo stesso tipo di calcolo dà lo stesso risultato per una qualsiasi coppia di punti.

Qui di seguito ci sono alcuni altri esercizi con rette e coppie di punti.