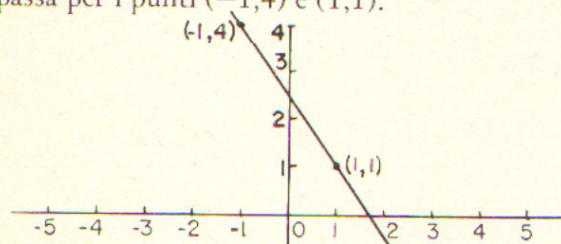


ESERCIZI



1.5.11 Trovare una formula per la retta che passa per i punti $(-1, 4)$ e $(1, 1)$.

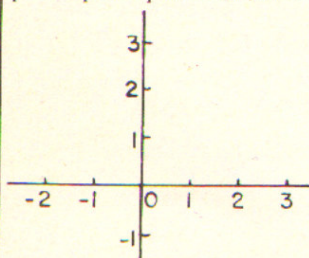


Siccome la retta punta verso sinistra, il coefficiente angolare della retta dovrebbe essere un numero negativo. Controlliamolo:

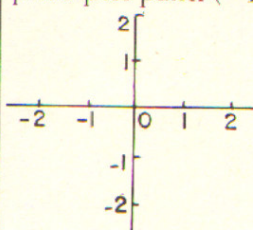
$$\begin{aligned} \text{coeff. ang.} &= \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ \uparrow \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ \uparrow \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ \uparrow \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ \uparrow \end{pmatrix}} = \frac{1 - 4}{1 - (-1)} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Formula ?

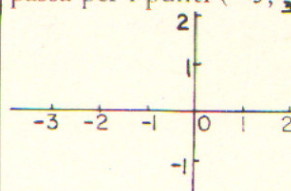
1.5.12 Trovare una formula per la retta che passa per i punti $(0, 1)$ e $(2, 2)$.



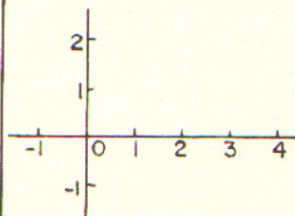
1.5.13 Trovare una formula per la retta che passa per i punti $(-1, -2)$ e $(1, 0)$.



1.5.14 Trovare una formula per la retta che passa per i punti $(-3, \frac{2}{3})$ e $(-1, -\frac{1}{3})$.



1.5.15 Il punto $(4, -1)$ si trova sulla retta che passa per i punti $(-1, \frac{3}{2})$ e $(1, \frac{1}{2})$?



16 ALTRE FORMULE DI FUNZIONI RIGUARDANTI

PARABOLE & CUBICHE

Ci sono altri grafici oltre alle rette che derivano da funzioni con semplici formule e che dicono esattamente quale risultato dovremmo avere per ogni valore della variabile indipendente.

Nell'ultima parte abbiamo mostrato come formule del tipo

$$f(x) = m(x) + b \quad (y = mx + b),$$

dove m e b sono costanti, hanno per grafico una retta con coefficiente angolare m e passano per il punto $(0, b)$.

In questo paragrafo giocheremo un po' con formule dette POLINOMI che sono del tipo

$f(x) = (x)^2 + 2 \cdot (x) - 1$ (che è la stessa cosa di $y = f(x) = x^2 + 2x - 1$). Ovvero

$$g(x) = (x)^3 - 6 \cdot (x)^2 + 9 \cdot (x) + 1$$

$$(\text{ovvero } y = g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1)$$

o anche

$$h(x) = \frac{1}{2}(x)^5 - 3 \cdot (x)^4 + \frac{3}{5}(x)^2 - 17 \cdot (x) + 1$$

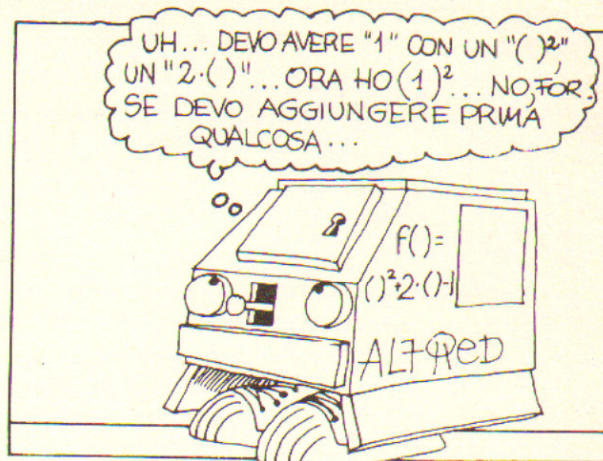
$$(y = h(x) = \frac{1}{2}x^5 - 3x^4 + \frac{3}{5}x^2 - 17x + 1).$$

Se Alfred sta studiando una funzione che ha una formula del tipo

$$f(x) = (x)^2 + 2 \cdot (x) - 1$$

possiamo dire esattamente cosa farà per un dato valore di x , per esempio,

prendiamo il valore 1:



basta aggiungere 1 negli spazi vuoti;

$$f(1) = (1)^2 + 2 \cdot (1) - 1,$$

e poi fare i calcoli per avere

$$f(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 = 2,$$

e così 2 è il risultato. Questo ci dice che c'è una freccia di corrispondenza di $f(x)$ che va da 1 a 2 e, fatto che ora ci serve di più, il punto $(1, 2) = (1, f(1))$ si troverà sul grafico di $f(x)$.

Per avere un'idea più precisa della forma del grafico di $f(x)$, di solito si scelgono altri valori di x più o meno a caso per trovare alcuni altri punti $(x, f(x))$ sul grafico. Allora basta unirli con una curva ininterrotta e sperare di aver fatto bene.

Per aiutarvi ad ottenere la forma giusta della curva vi diamo alcuni consigli.





62



Per disegnare il grafico di una parabola come

$$f(x) = (x)^2 + 2(x) - 1$$

è comodo stabilire prima alcune informazioni generali sulla sua forma e sulla posizione del suo vertice. Questa è una lista di controllo:

$A=1$ e $B=2$ quindi

In su o in giù? IN SU poichè $A=1 > 0$
 Snella o pangiuta? Media... $A=1$
 Vertice? $x = -\frac{B}{2A} = -\frac{2}{2 \cdot 1} = -1$.

E quindi il vertice si trova nel punto $(-1, f(-1)) = (-1, (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 1) = (-1, -2)$

Il passo successivo è calcolare alcuni altri punti sul grafico. Cominciamo con lo scegliere alcuni valori di x prossimi alla "coordinata x del vertice", -1 , come

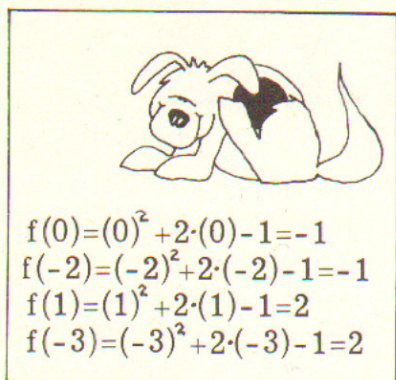
$x=0$, $x=-2$, $x=1$ e $x=-3$.

Poi troviamo " $f(x)$ " per ciascuno di questi valori e facciamo una lista dei punti $(x, f(x))$.

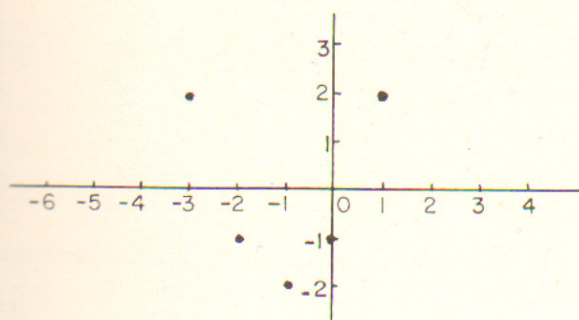
Punti
per il
grafico:

valore di x	valore di $f(x)$
0	-1
-2	-1
1	2
-3	2

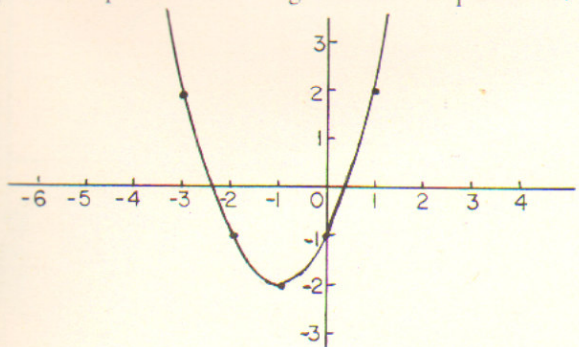
$(0, -1)$	$f(0) = (0)^2 + 2 \cdot (0) - 1 = -1$
$(-2, -1)$	$f(-2) = (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 1 = -1$
$(1, 2)$	$f(1) = (1)^2 + 2 \cdot (1) - 1 = 2$
$(-3, 2)$	$f(-3) = (-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 1 = 2$



Ora inseriamo questi punti nel grafico, senza dimenticare "il vertice" $(-1, -2)$!

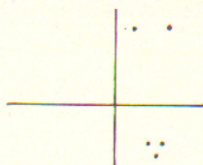


e tracciamo una bella curva ininterrotta che passa per i punti segnati, che speriamo rappresenti più o meno il grafico della parabola.

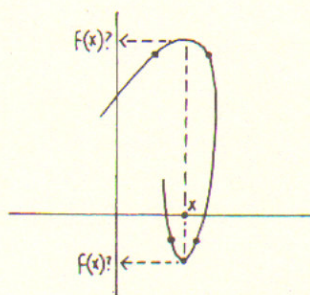


Una cosa importante da ricordare, svolgendo questa operazione di unione dei punti, è che l'ordine che generalmente si segue per spostarsi da un punto all'altro è sempre da destra a sinistra, nel senso delle x crescenti.

Questo è un esempio che mostra cosa succede se non uniamo i punti nell'ordine giusto. Supponiamo di avere alcuni punti che appartengono al grafico di una funzione, come



Possiamo essere tentati di disegnare la curva in questo modo:



Ma questo non sarà mai giusto se la curva è il grafico di una VERA funzione, dato che, secondo le REGOLE per le funzioni, per ogni valore di x sull'asse x deve esserci al massimo una freccia di corrispondenza che parte da x . Così può esserci al massimo un punto sul grafico al disopra o al disotto di x . Abbiamo trovato un esempio nel grafico precedente che mostra come questa regola non è seguita dalla curva che abbiamo disegnato.

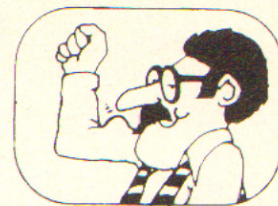
Così il grafico deve essere del tipo



che non presenta questo tipo di problema.

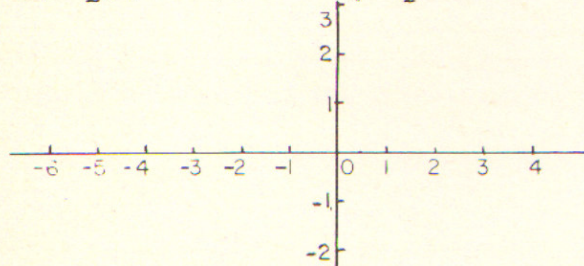
Ecco alcuni esercizi per aiutarvi a familiarizzare con le parabole.

ESERCIZI



1.6.1 Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 \quad (y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1)$$



In su o in giù ?

Snella o panciuta ?

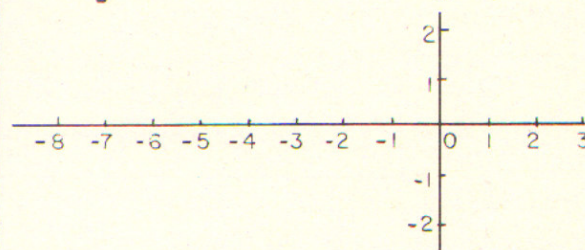
Posizione del vertice ?

Alcuni punti ?

P.S. IN FONDO AL LIBRO TROVERETE PAGINE PER
"SCRABOCCHI".

1.6.3 Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 2x - 1 \quad (y = -\frac{1}{3}x^2 - 2x - 1)$$



In su o in giù ?

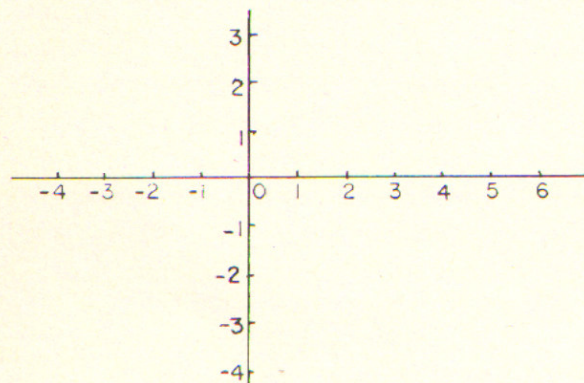
Snella o panciuta ?

Posizione del vertice ?

Alcuni punti ?

1.6.2 Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = -2x^2 + 4x + 1 \quad (y = -2x^2 + 4x + 1)$$



In su o in giù ?

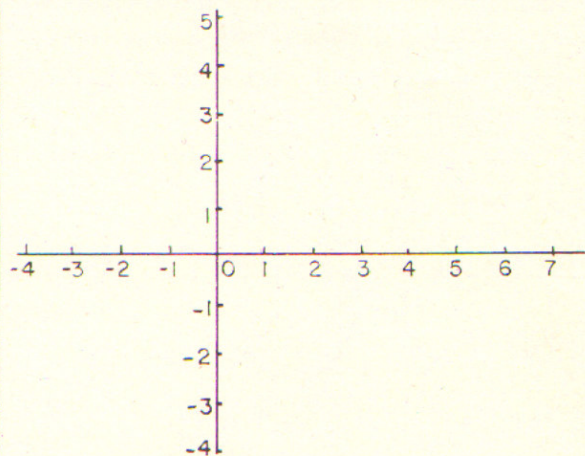
Snella o panciuta ?

Posizione del vertice ?

Alcuni punti ?

1.6.4 Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = -12x^2 + 4x + 5 \quad (y = -12x^2 + 4x + 5)$$



In su o in giù ?

Snella o panciuta ?

Posizione del vertice ?

Alcuni punti ?

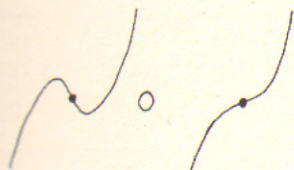
Se $g(\)$ ha un'espressione simbolica del tipo

$$g(\) = A(\)^3 + B(\)^2 + C(\) + D$$

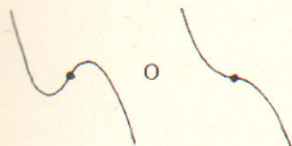
(che sta ad indicare la stessa funzione di

$$y = g(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$$

dove A, B, C, e D sono costanti, allora $g(\)$ ha per grafico un tipo di curva che si chiama CUBICA. Le cubiche hanno la forma



se A è un numero positivo oppure



se A è un numero negativo.

UN PUNTO DELLA CURVA UTILE DA CONOSCERE È IL PUNTO IN CUI (SE $A > 0$) LA CURVA CESSA DI FARE

E COMINCIA A FARE

È CHIAMATO "PUNTO DI FLESSO"

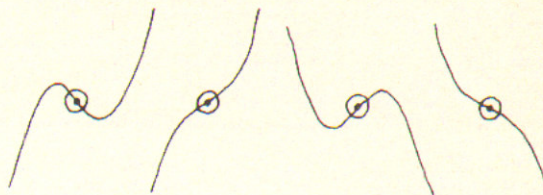


Questo punto è sempre al disopra o al disotto di

$$x = -\frac{B}{3 \cdot A}$$

nel punto $(-\frac{B}{3 \cdot A}, g(-\frac{B}{3 \cdot A}))$.

In tutte queste diverse cubiche il "punto di flesso" è racchiuso da un cerchio:

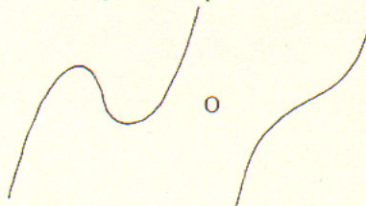


Questi "punti di flesso" sono in un certo senso il centro di azione delle cubiche, siccome ogni cubica ripete da un lato del punto quello che fa dall'altro, come rovesciandosi.

Per disegnare il grafico di una cubica come

$$g(\) = (\)^3 - 6 \cdot (\)^2 + 9 \cdot (\) + 1,$$

per prima cosa occorre farsi un'idea della sua forma: $A = 1$ nel nostro caso, quindi l'andamento è di questo tipo



Poi, siccome $A = 1$ e $B = -6$, il punto di flesso è al disopra di

$$x = \frac{-B}{3 \cdot A} = \frac{-(-6)}{3 \cdot 1} = 2. \text{ Inoltre, siccome}$$

$$g(2) = (2)^2 - 6 \cdot (2)^2 + 9 \cdot (2) + 1 = 8 - 24 + 18 + 1 = 3,$$

il punto di flesso è

$$(2, g(2)) = (2, 3).$$

Ora basta trovare alcuni altri punti sul grafico; scegliamo valori di x vicini alla "coordinata x del punto flesso" = 2.

Infine inseriamo i punti e disegniamo la curva:

Con

$$g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

Se $x =$ Allora $f(x) =$

(3 , 1)

(1 , 5)

(4 , 5)

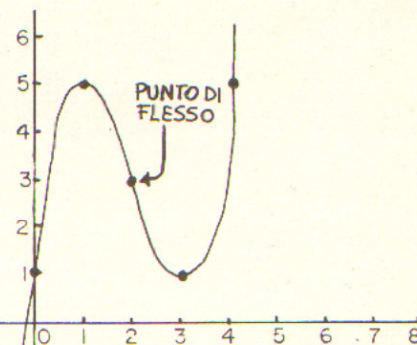
(0 , 1)

$$g(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 1 = 1$$

$$g(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 1 = 5$$

$$g(4) = 4^3 - 6 \cdot 4^2 + 9 \cdot 4 + 1 = 5$$

$$g(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 + 1 = 1$$



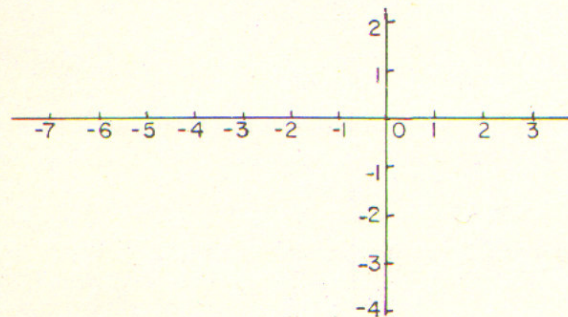
Ecco alcuni esercizi per impraticarsi con le cubiche.

ESERCIZI



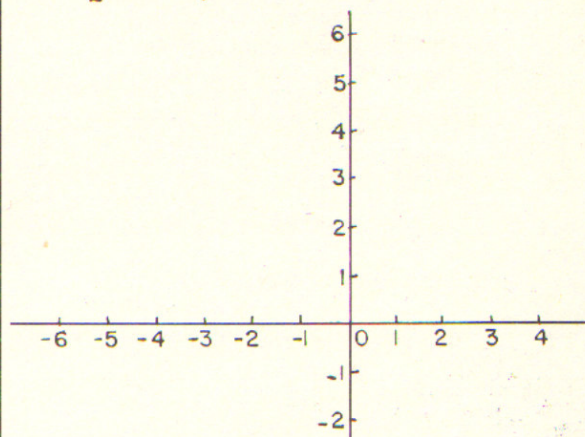
1.6.5 Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = -x^3 - 6x^2 - 9x - 3.$$



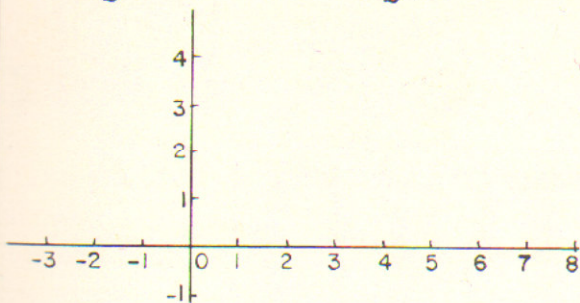
1.6.6 Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 2.$$



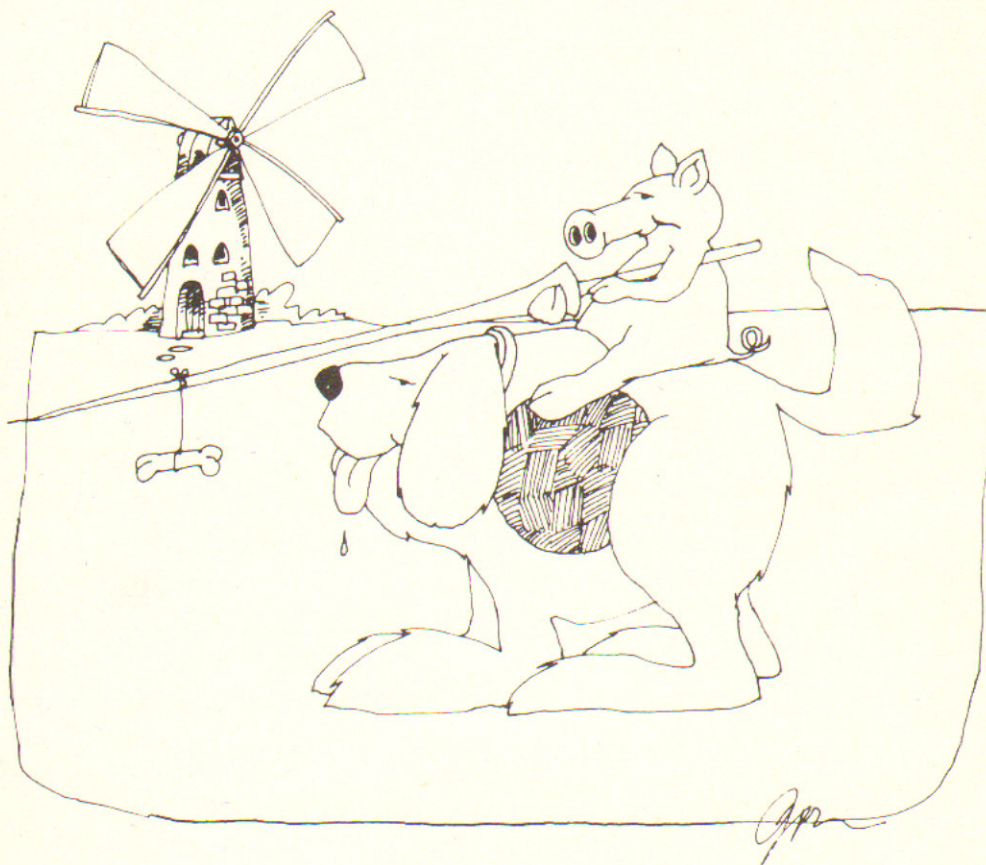
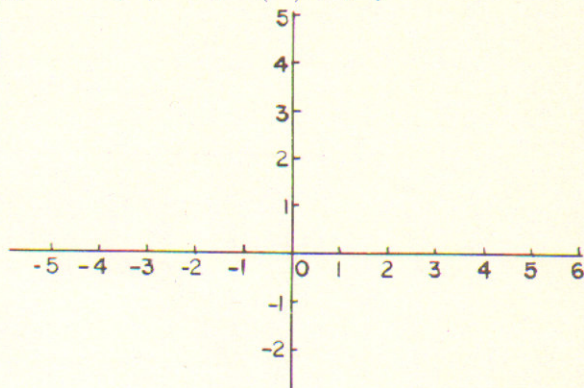
1.6.7 Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + \frac{9}{2} \cdot x + 1$$



1.6.8 Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = -x^3 + 3 \cdot x^2 + 2$$



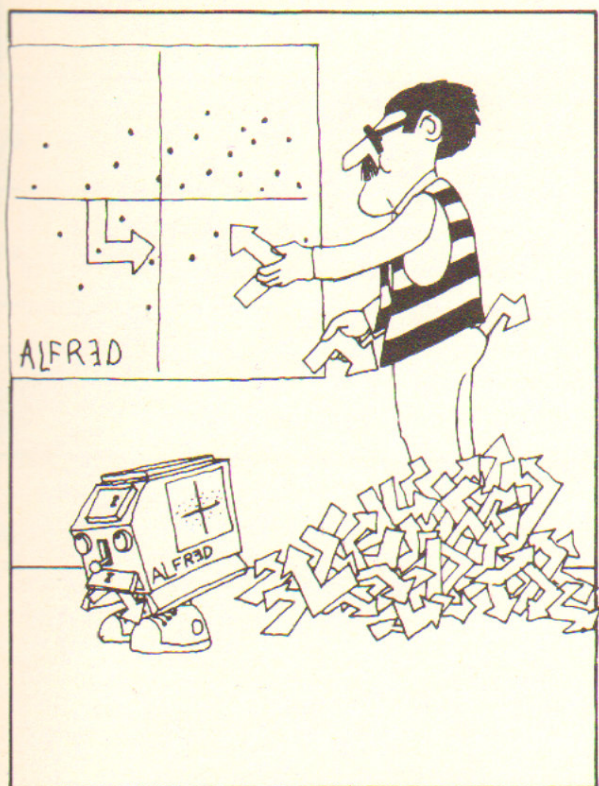
CAPITOLO II LIMITI

Il capitolo II tratta il modo in cui i matematici riuscirono a trovare una risposta un po' complicata alla domanda . . .

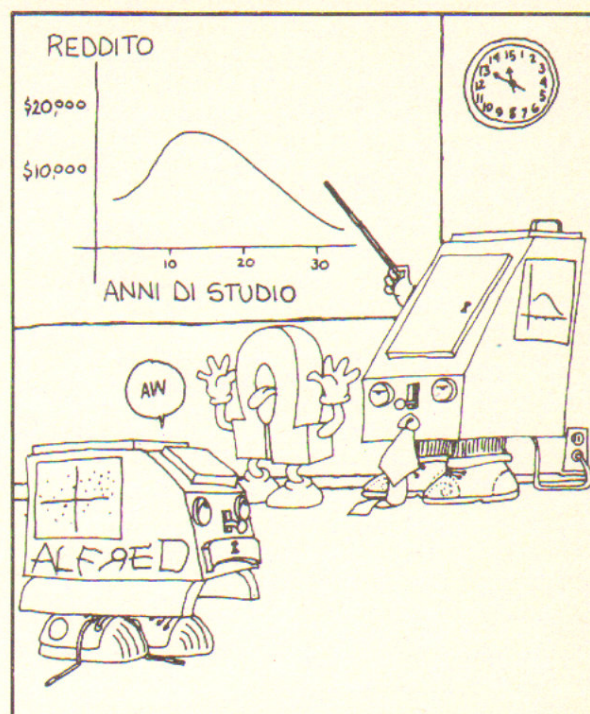


II. IL PROBLEMA DELLA REGOLARITÀ

Se Alfred sta studiando una funzione il cui dominio e il cui codominio sono insiemi di numeri, possiamo disegnare abbastanza facilmente il grafico della funzione lasciando solo i punti in cui le frecce di corrispondenza cambiano direzione

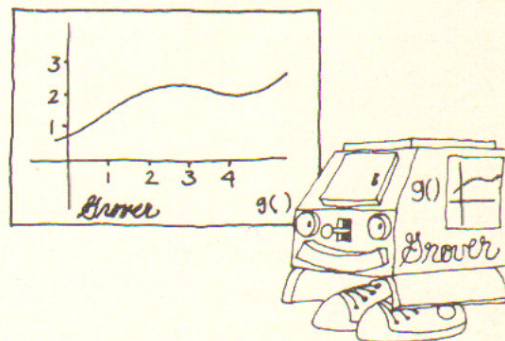


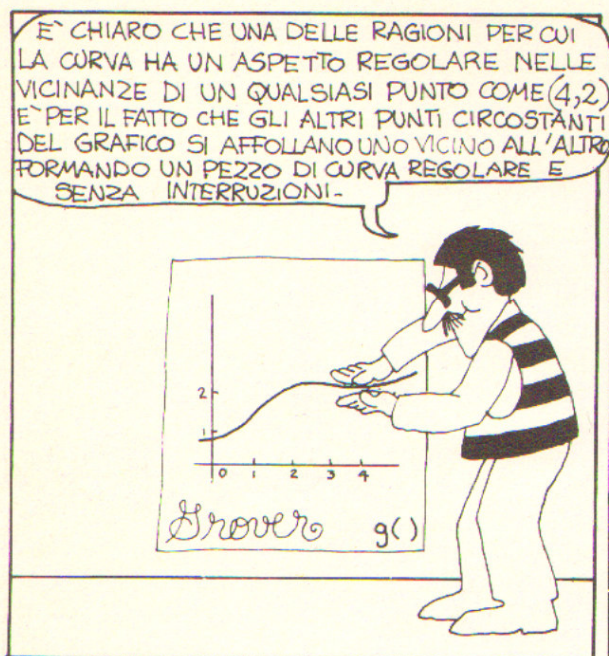
Questa volta il grafico di Alfred è un pasticcio - solo un caos di punti sparpagliati! Non assomiglia affatto ai grafici che vengono usati in fisica, chimica, economia, ecc. Questi grafici hanno quasi sempre delle curve regolari.



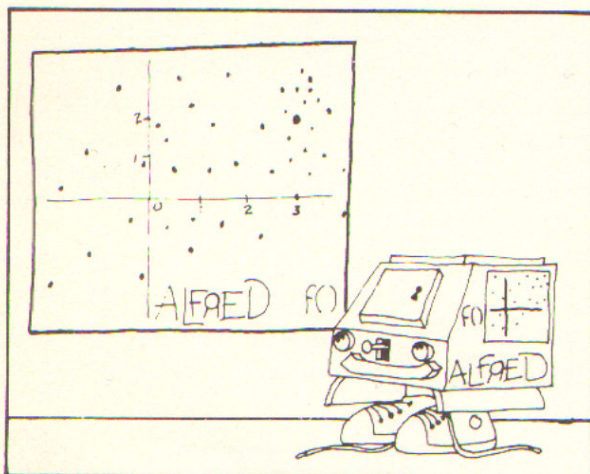
Ma le regole per le funzioni non ci dicono se i punti sul grafico formano o meno una curva regolare. Per questo i matematici cercano di trovare un modo di descrivere rigorosamente questa "regolarità", affinché si potesse DIMOSTRARE quali funzioni hanno per grafico una curva regolare.

A prima vista questo non sembra un grosso problema. Supponiamo che Grover stia lavorando a una funzione il cui grafico abbia un bell'aspetto regolare.





Se torniamo a considerare la funzione di Alfred dallo stesso punto di vista,

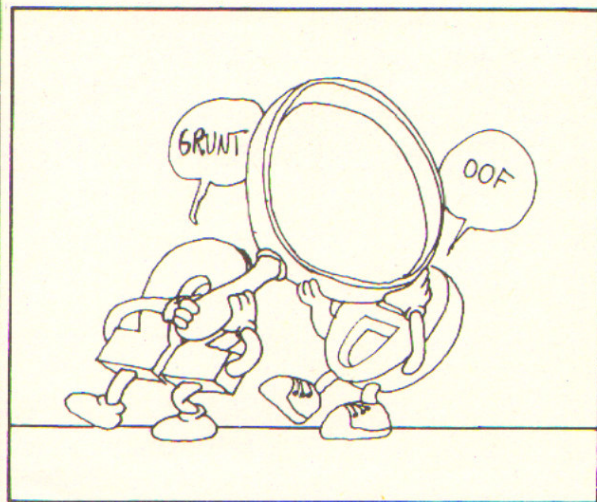


una ragione per cui i punti del grafico sono tanto disordinati e NON formano una curva regolare e senza interruzioni è che vicino ad un qualsiasi punto, come (3,2), gli altri punti circostanti del grafico NON si raggruppano abbastanza vicini gli uni agli altri da formare un piccolo tratto di una curva regolare e senza interruzioni.

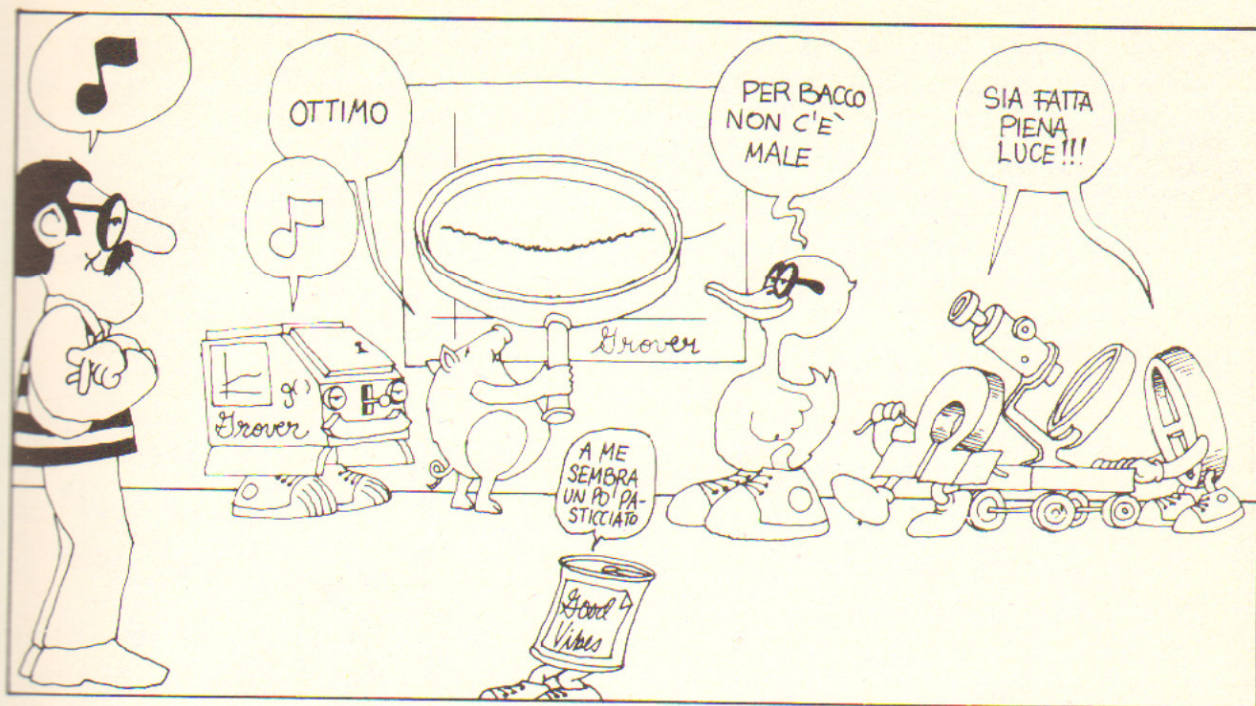


Ma...

prima di permettere a McSquared di rimettere a posto le cose in questo modo, dovremmo riconsiderare il grafico di Grover per assicurarci che sia veramente regolare e ininterrotto per quanto lo si guardi da vicino.



Tutto sembra quadrare per un po' (a parte l'opinione di Good Vibes)...



ma si vede che c'è un piccolo problema.



ESERCIZI



II.2.1 Quando McSquared ha inserito $1/8$ nella

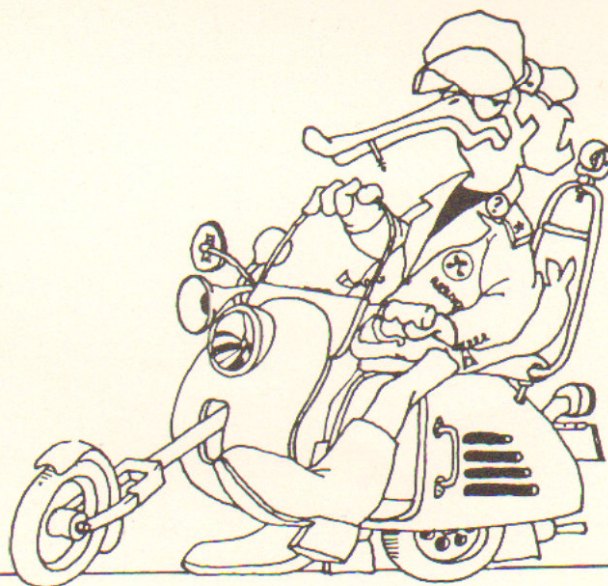


, il risultato è stato $1/4$. Controllate la garanzia, cioè passate da SE ad ALLORA con l'algebra.

$$\text{SE } 2 - 1/4 < x < 2 + 1/4.$$

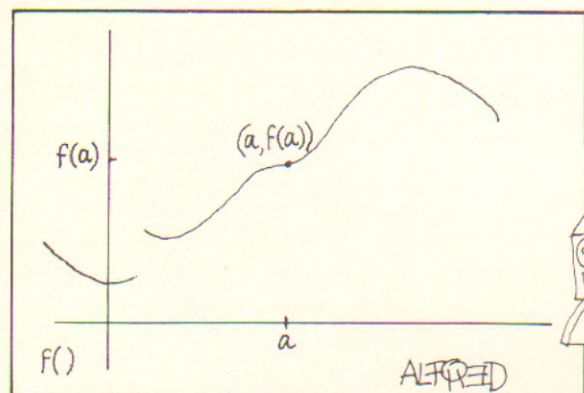
$$\text{ALLORA } 3 - 1/8 < 1/2 x + 2 < 3 + 1/8$$

II.2.2 Quando  suggeriva $1/1000$ come numero di sfida per il margine di errore, R.D. disse che $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ avrebbe dato come risultato un $1/500$ garantito. Controllate se questo è effettivamente garantito.

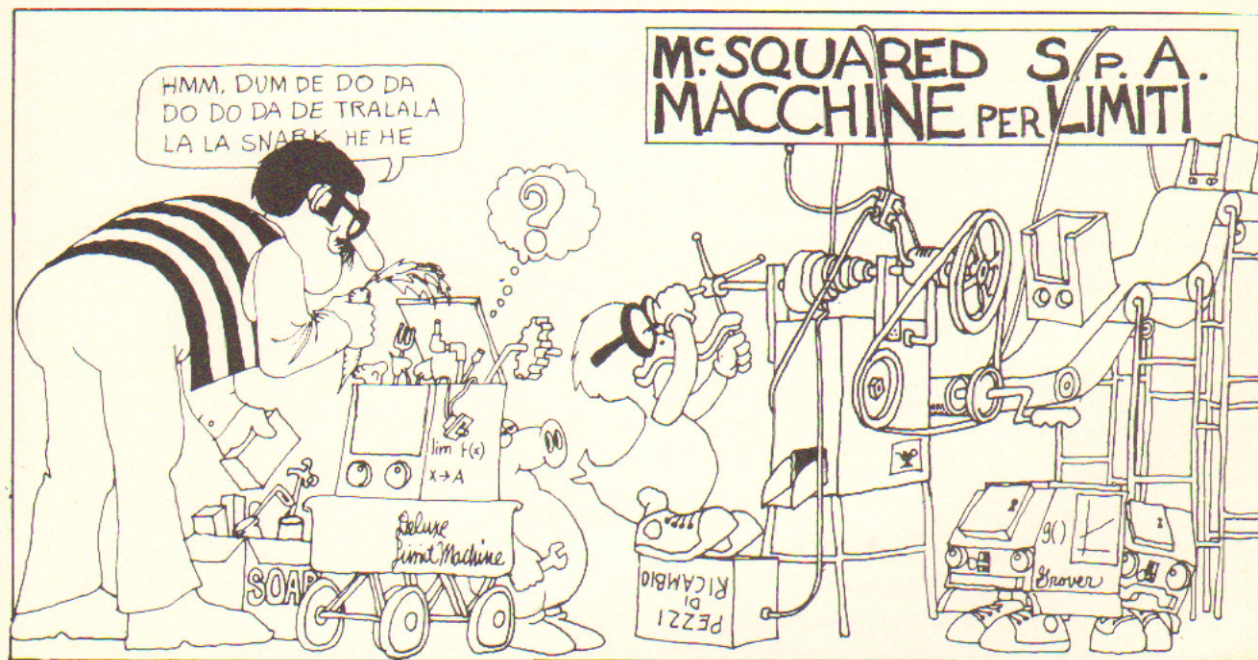


I 3 E

I matematici hanno fatto ricorso a questo astuto metodo "legislativo" per stabilire una procedura per trattare qualsiasi funzione il cui grafico si suppone regolare e senza interruzioni nei pressi di un punto $(a, f(a))$.



Non ci preoccupiamo se il grafico è VERAMENTE regolare e senza interruzioni vicino ad $(a, f(a))$ (nessuno lo saprà mai). Se possiamo costruire una macchina per limiti che fornisce un intervallo di risposta garantito per ogni scelta del numero che dà il margine di errore, STABILIAMO PER DEFINIZIONE che la nostra capacità di costruire tale macchina per limiti per $f(x)$ è una giustificazione sufficiente per affermare che il grafico di $f(x)$ è regolare e ininterrotto vicino ad $(a, f(a))$. Questo è il massimo che possiamo fare; se non altro possiamo costruire delle barriere.





Supponiamo che sia costruibile una macchina per limiti per $f(\cdot)$ vicino ad un punto $(a, f(a))$. (Per legge, questo significa che la funzione è regolare e ininterrotta vicino ad $(a, f(a))$.)

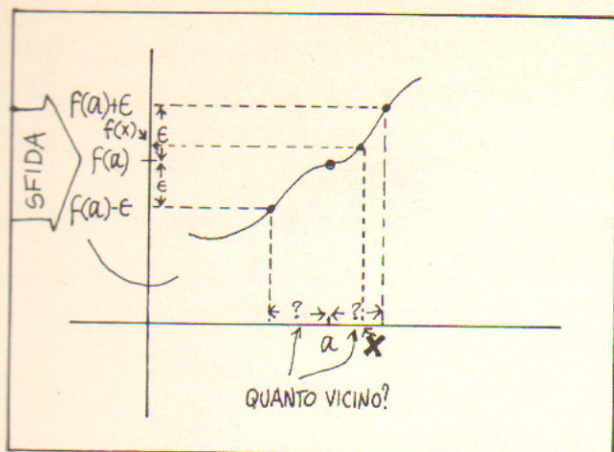
Per prima cosa la macchina per limiti (che si chiama $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$) viene sfidata con un certo numero positivo che rappresenta il margine di errore. Il simbolo matematico ufficiale che rappresenta questo margine di errore usato come sfida è "ε". (Si legge "epsilon").



Questa volta, quando McSquared inserisce nella macchina e invece di un numero vero e proprio



ciò costituisce una sfida tipo per la macchina per limiti, cioè gli chiede QUANTO VICINO ad a deve essere x affinché il risultato di ALFRED $f(x)$ sia abbastanza vicino ad $f(a)$ sull'asse y da essere compreso entro la particolare distanza rappresentativa che è data dal margine di errore ϵ .



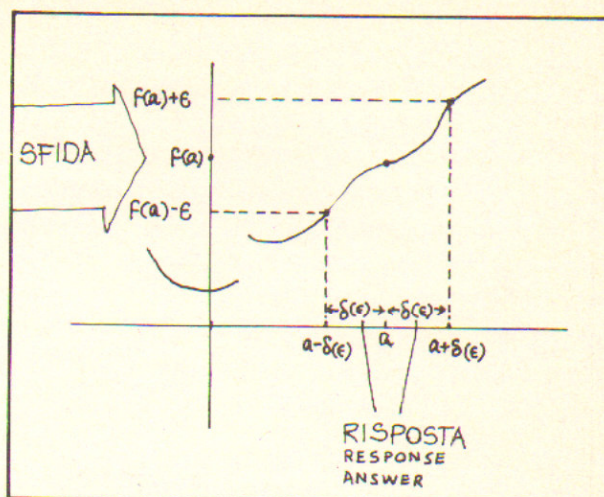
Che $f(x)$ si trovi entro questo margine ϵ da $f(a)$ significa semplicemente che $f(x)$ deve trovarsi all'interno di un segmento dell'asse y definito dalla disuguaglianza

$$f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon$$

La risposta a questo stimolo ϵ è data dalla macchina per limiti: è un altro simbolo " $\delta(\epsilon)$ " (si legge "delta con epsilon").



Questo simbolo $\delta(\epsilon)$ indica una distanza: è la risposta alla domanda "QUANTO VICINO...?"



Quando la macchina per limiti fornisce $\delta(\epsilon)$ **AFFERMA** che SE x è a una distanza compresa tra 0 e $\delta(\epsilon)$ da a , **ALLORA** il risultato $f(x)$ di **ALFRED** sarà abbastanza vicino ad $f(a)$ sull'asse y da essere compreso entro il margine di errore richiesto ϵ .

Se x dev'essere ad una distanza compresa tra 0 e $\delta(\epsilon)$ da a sull'asse x , allora x deve appartenere all'intervallo

$$(a - \delta(\epsilon), a + \delta(\epsilon))$$

che va da $a - \delta(\epsilon)$ fino al punto $a + \delta(\epsilon)$. Così questi x devono soddisfare la disuguaglianza

$$a - \delta(\epsilon) < x < a + \delta(\epsilon)$$

Questo simbolo " $\delta(\epsilon)$ " **NON** significa " δ " moltiplicato per " ϵ "; lo spazio in $\delta()$ è come lo spazio vuoto in " $f()$ ". La funzione $f()$ deve essere specificata da un numero, come 13, e produce un altro numero, detto " $f(13)$ ". $\delta()$ è il simbolo per la funzione della MACCHINA PER LIMITI, che deve essere specificata da un determinato margine di errore, come $1/2$, e quindi deve dare come risultato un altro numero che si chiama " $\delta(1/2)$ ". Non sappiamo ancora quale dev'essere questo numero, dal momento che non abbiamo una **FORMULA** esplicita per $\delta()$.

Riassumendo: quando viene messa alla prova da un margine di errore rappresentato da " ϵ ", la macchina per limiti, che è associata ad una funzione $f(\cdot)$ nel punto $x = a$, deve fornire una risposta rappresentativa con il simbolo " $\delta(\epsilon)$ ". La macchina per limiti quindi afferma che



La macchina **AFFERMA** che questo è vero e eventualmente deve essere in grado di dare una **GARANZIA** che lo **PROVI** realmente. Ma naturalmente una macchina per limiti non può nemmeno cominciare a dimostrare qualcosa senza conoscere esattamente

(1) la formula della particolare funzione in esame ,

(2) il numero " a " sull'asse x ,
e

(3) una **FORMULA** per $\delta(\epsilon)$,

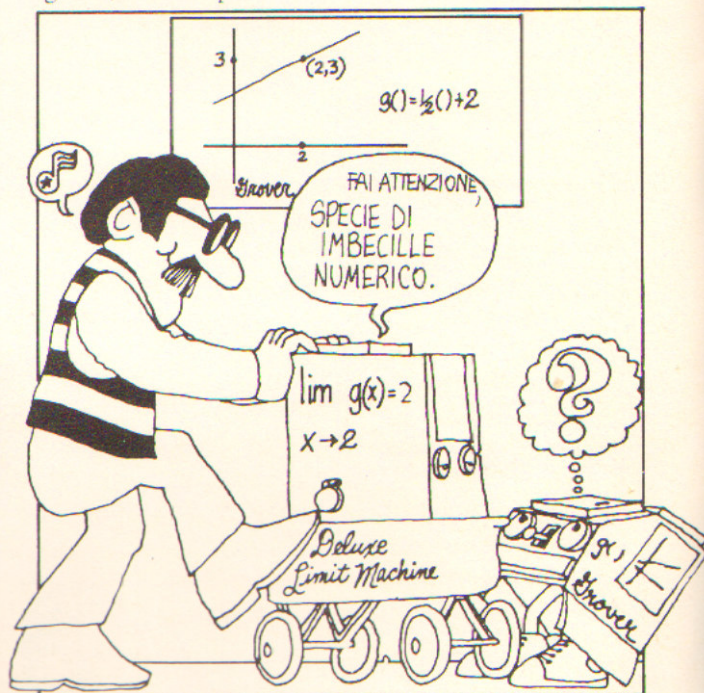
dal momento che una vera e propria dimostrazione si può costruire soltanto se disponiamo di questi dati.

90

Vediamo se possiamo scoprire come costruire una macchina per limiti associata alla funzione

$$g(\cdot) = 1/2 \cdot (\cdot) + 2$$

che Grover stava studiando nell'ultimo para-
grafo, dove il punto " a " è 2.

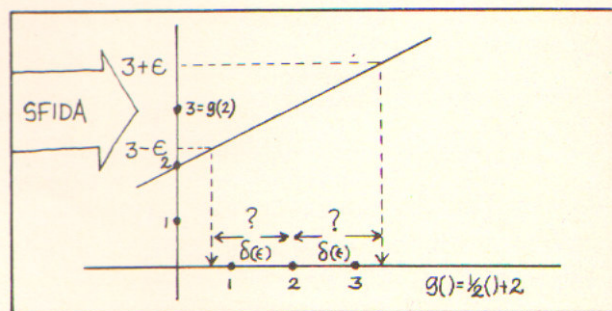


In questo caso,

$$g(a) = g(2) = 1/2 \cdot (2) + 2 = 3,$$

$$\text{e, } g(x) = 1/2(x) + 2.$$

Quindi il problema della macchina per limiti è stabilire con precisione quale deve essere la distanza $\delta(\epsilon)$ (in corrispondenza di un qualsiasi margine di errore ϵ piccolo a piacere) ...



tale che possa garantire che
SE prendiamo un qualsiasi x tale che

$$\overset{a}{\underset{\uparrow}{2}} - \delta(\epsilon) < x < \overset{a}{\underset{\uparrow}{2}} + \delta(\epsilon)$$

ALLORA, per quegli x ,

$$\underset{\uparrow}{g(2)} - \epsilon < \underbrace{\frac{1}{2}(x) + 2}_{g(x)} < \underset{\uparrow}{g(2)} + \epsilon.$$

Ma siccome ϵ sta per uno qualsiasi degli infiniti margini di errore di prova possibili, non può esserci una garanzia per le singole risposte a TUTTI i possibili numeri di prova, come purtroppo ha dovuto constatare McSquared nel paragrafo precedente. La cosa migliore che può fare una "prova" della garanzia è trovare una formula per $\delta(\epsilon)$ che esprime esattamente quale dovrebbe essere $\delta(\epsilon)$ per UN QUALSIASI ϵ di prova e poi usare l'algebra per arrivare da

$$\text{"SE } 2 - \delta(\epsilon) < x < 2 + \delta(\epsilon)\text{"}$$

$$\text{a "ALLORA } 3 - \epsilon < \frac{1}{2}(x) + 2 < 3 + \epsilon."$$

Se si trova la formula giusta per $\delta(\epsilon)$ allora QUANDO SI SOSTITUISCE AD ϵ UN DETERMINATO NUMERO DI PROVA, L'ALGEBRA CI DICE CHE IL RAGIONAMENTO SARA' SEMPRE VALIDO !!



Nell'ultimo paragrafo, ogni volta che McSquared inseriva nella macchina un numero di prova per il margine di errore nella



il numero che ne risultava era doppio del numero introdotto. Torniamo indietro: quando McSquared mise alla prova la macchina per limiti con $\frac{1}{2}$, il risultato fu 1 **GARANZIA** e la garanzia facendo uso

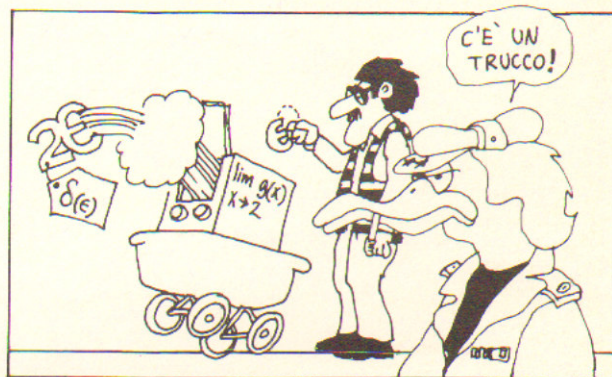
dell'algebra mostrava che 1 funzionava sul serio! Quindi, in questo caso, con un margine di errore di prova di $\frac{1}{2}$, la risposta $\delta(\frac{1}{2})=1$, che è uguale a $2 \cdot (\frac{1}{2})$ poteva effettivamente essere garantita!

Poi tentò con $1/4$, e ricevette la risposta $1/2$, che poteva essere garantita come al solito. Così, in questo caso $\delta(\frac{1}{4}) = 1/2$ (che è uguale a $2 \cdot (1/4)$!) (Notate come lo spazio vuoto in $\delta(\epsilon)$ viene riempito dal particolare valore di ϵ !) Quindi forse una buona STIMA per una FORMULA di $\delta(\epsilon)$ è che la risposta $\delta(\epsilon)$ sia sempre il DOPPIO dell' ϵ di prova, cioè

$$\delta(\epsilon) = 2(\epsilon)$$

o, in modo più convenzionale

$$\delta(\epsilon) = 2(\epsilon).$$



ADESSO CHE ABBIAMO UNA POSSIBILE FORMULA PER $\delta(\epsilon)$,
VEDIAMO SE POSSIAMO USARE L'ALGEBRA PER COMPLE-
TARE LA

★ GARANZIA! ★



★ SE PRENDIAMO UNA QUALSIASI x TALE CHE ... $2 - \delta(\epsilon) < x < 2 + \delta(\epsilon)$

★ ORA, SOSTITUENDO $2 \pm \epsilon$

A $\delta(\epsilon)$ (SICCOME $\delta(\epsilon) = 2\epsilon$) $2 - 2\epsilon < x < 2 + 2\epsilon$

(ORA USIAMO L'ALGEBRA SU QUESTO x PER AVERE $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$)

★ MOLTIPLICHIAMO PER $\frac{1}{2}$ PER AVERE

L' " $\frac{1}{2}$ " IN " $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$ " $\frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2\epsilon < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2\epsilon$

★ ... E SEMPLIFICHIAMO, ALLORA $1 - \epsilon < \frac{1}{2}x < 1 + \epsilon$

★ E SOMMIAMO 2 PER AVERE IL "2"

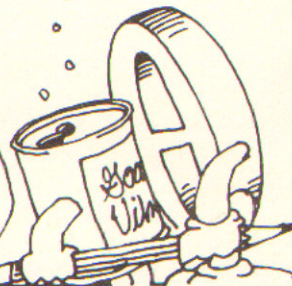
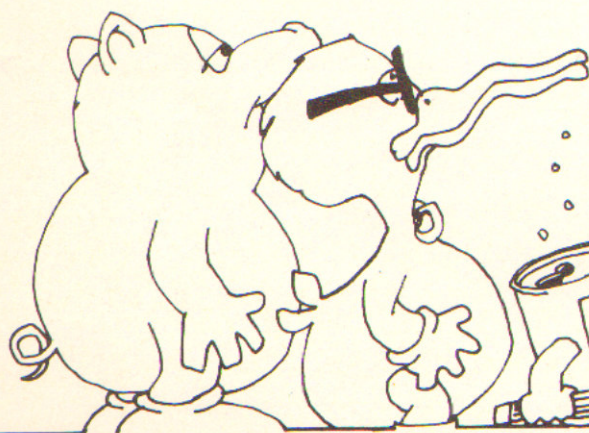
IN $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$ $2 + 1 - \epsilon < \frac{1}{2}x + 2 < 2 + 1 + \epsilon$

*** ALLORA $3 - \epsilon < \frac{1}{2}x + 2 < 3 + \epsilon$

OR
 $3 - \epsilon < g(x) < 3 + \epsilon$!

LA GARANZIA FUNZIONA! DAL MOMENTO CHE QUESTA
ALGEBRA VA PROPRIO BENE PER OGNI ϵ , OGNI VOLTA CHE MET-
TIAMO ALLA PROVA  CON UN DETERMINATO MARGINE DI

ERRORE QUALSIASI (NON SEMPLICE-
MENTE IL NUMERO ϵ), L'ALGEBRA
CI CONSENTE DI INSERIRE IL DOPIO DI QUEL NUMERO AL
POSTO DI $\delta(\epsilon)$ (DAL MOMENTO CHE ADESSO $\delta(\epsilon) = 2 \cdot (\epsilon)$) E
LA GARANZIA DEVE VALERE! L'ALGEBRA CI
ASSICURA CHE LE COSE STANNO
PROPRIO COSÌ !!!



ON
FUNZIONE

LA
DIREZIONE

Pertanto i matematici hanno dichiarato che il seguente RITUALE è una “dimostrazione” ufficialmente accettabile.

GERGO MATEMATICO UFFICIALE

DIMOSTRARE che il grafico di

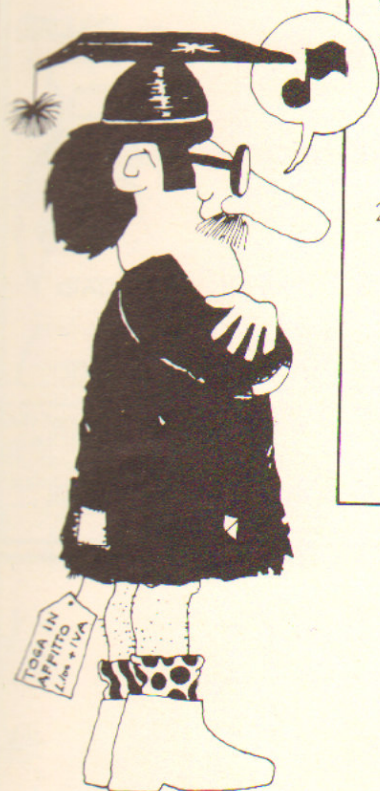
$$g(x) = 1/2 (x) + 2$$

è regolare e continua vicino a $(2, g(2))$.

1. Per ogni $\epsilon > 0$, sia $\delta_{(\epsilon)} = 2\epsilon$.
(Che è lo stesso di costruire la macchina per limiti “ $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ ” che produce due volte il numero “ ϵ ” con il quale è stato messo alla prova.)

2. Garanzia :
(Sostituendo 2ϵ a $\delta_{(\epsilon)}$)
(Moltiplicando per $1/2$)
(Sommando $+2$)
oppure, sostituendo ancora $g(x)$:
ALLORA $g(2) - \epsilon < g(x) < g(2) + \epsilon$

(E questo è tutto quello che è necessario nella garanzia !)



Adesso il professor McSquared inserirà tutta questa teoria sulle funzioni $f(x)$ in genere e i punti “a” in una Definizione Matematica Ufficiale ! Notate il termine “continua”, che viene usato al posto di “regolare e senza interruzioni”. (“Senza interruzioni” è una dizione certamente NON ufficiale).

DEFINIZIONE MATEMATICA UFFICIALE

SE $f()$ E' UNA FUNZIONE

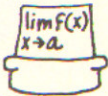
1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ESISTE E VALE $f(a)$
SE, PER OGNI NUMERO DI PROVA $\epsilon > 0$, C'E' UN NUMERO DI RISPOSTA $\delta(\epsilon) > 0$ TALE CHE, **SE** x SODDISFA ALLA CONDIZIONE $a - \delta(\epsilon) < x < a + \delta(\epsilon)$
ALLORA, PER QUEI VALORI DI x , $f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon$.

2. SI DICE CHE $f()$ E' CONTINUA NEL PUNTO $x=a$ SE $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ESISTE ED E' UGUALE A $f(a)$.

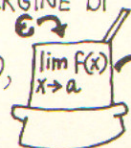
(TRADUZIONE CONFIDENZIALE)
E NON UFFICIALE

SE  E' UNA MACCHINA PER FUNZIONI,

1. UNA MACCHINA PER LIMITI GARANTITA ESISTE PER LA FUNZIONE $f()$ VICINO AD $(a, f(a))$ SE C'E' UNA

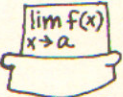
MACCHINA  CHE HA LA PROPRIETA'

CHE OGNI VOLTA CHE SI INSERISCE UN NUMERO DI PROVA PER IL MARGINE DI ERRORE CON IL

SIMBOLO $\epsilon > 0$,  SI HA COME RISULTATO

UN ALTRO NUMERO $\delta(\epsilon) > 0$ CHE E' GARANTITO IN QUESTO MODO: SE SI PRENDE UN QUALSIASI VALORE DI x CHE SODDISFA $a - \delta(\epsilon) < x < a + \delta(\epsilon)$ E LO

SI INSERISCE IN  ALLORA IL RISULTATO $f(x)$ SODDISFA $f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon$.

2. IL GRAFICO DI $f()$ E' REGOLARE E ININTERROTTO VICINO AD $(a, f(a))$ SE  ESISTE,

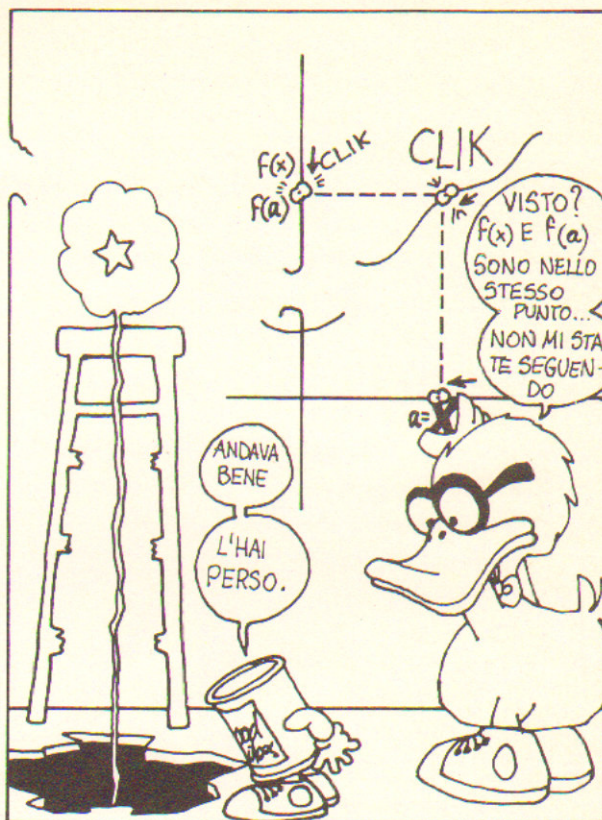
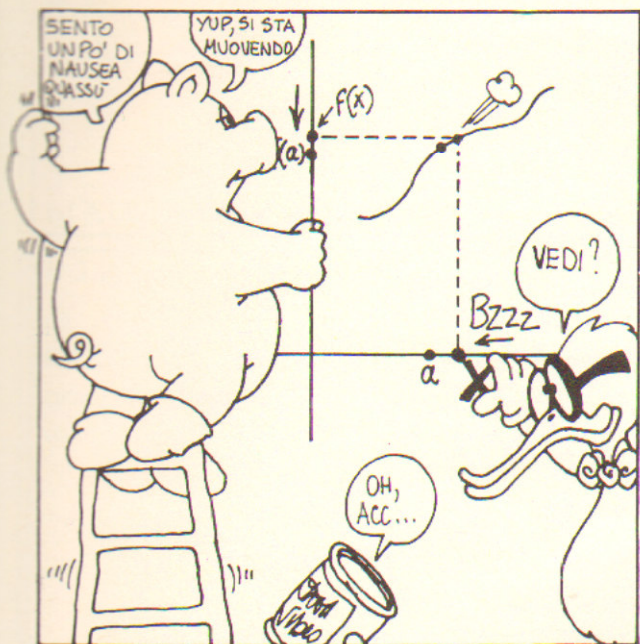
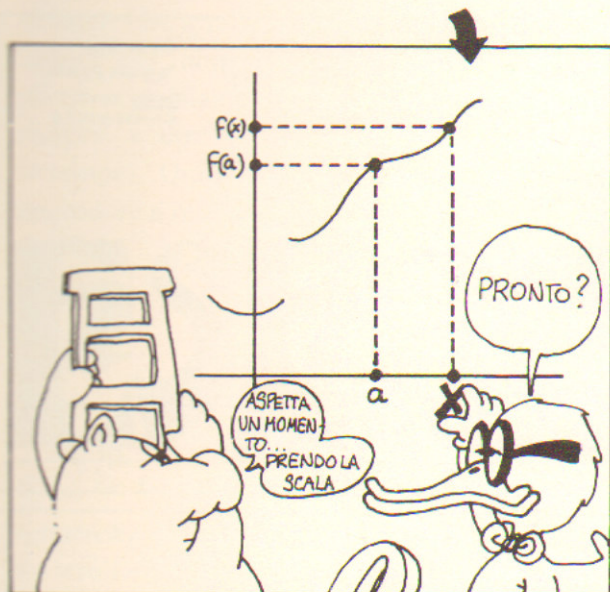
ED E' IN GRADO DI SVOLGERE QUESTE OPERAZIONI CON $\epsilon - \delta(\epsilon)$.



I matematici spesso riassumono tutto questo dicendo semplicemente "il limite di $f(x)$ per x che tende ad a è $f(a)$ " ovvero, in gergo,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

che ci riporta all'idea intuitiva che (se $f(\cdot)$ è regolare), quando x si avvicina ad a , $f(x)$ si avvicina ad $f(a)$ come al suo numero LIMITE.



Ma non possiamo mai andare tanto avanti da vedere veramente l'arrivo finale di x fino ad a e, nello stesso tempo, vedere l'arrivo di $f(x)$ fino ad $f(a)$!!! Invece dobbiamo accontentarci del significato LOGICO ufficiale di

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

che è sempre SOLO che esiste un'opportuna macchina per limiti. Allora, con questa macchina per limiti garantita, POSSIAMO far vedere che siamo in grado di ottenere $f(x)$ "tanto vicino ad $f(a)$ quanto si vuole" (che equivale a "entro un margine di errore ϵ qualsiasi") prendendo x "abbastanza vicino" ad a (basta rendere la distanza di x ad a minore di $\delta(\epsilon)$). Questo non è proprio la stessa cosa dell'idea intuitiva, ma è la cosa migliore che possiamo fare.

Dopo tutte queste cose un po' difficili, torniamo indietro un momento per esaminare un paio di proprietà delle definizioni ufficiali di limite e di continuità.

Gli intervalli di prova devono essere veri e propri intervalli di lunghezza positiva e per questo ϵ deve essere maggiore di zero. Anche $\delta(\epsilon)$ deve essere maggiore di zero. Questo perché una funzione qualsiasi $h(\cdot)$, sia che il suo grafico abbia o meno interruzioni vicino ad $(a, h(a))$, ha solo UN punto del suo grafico al disopra (o al disotto) di $x = a$, cioè $(a, h(a))$. Riguardate le regole per le funzioni: c'è solo una freccia di corrispondenza che parte da "a" nel dominio). Per ogni ϵ di prova potremo sempre "delimitare" il PUNTO $(a, h(a))$ con barriere "ad un punto" situate alle coordinate.

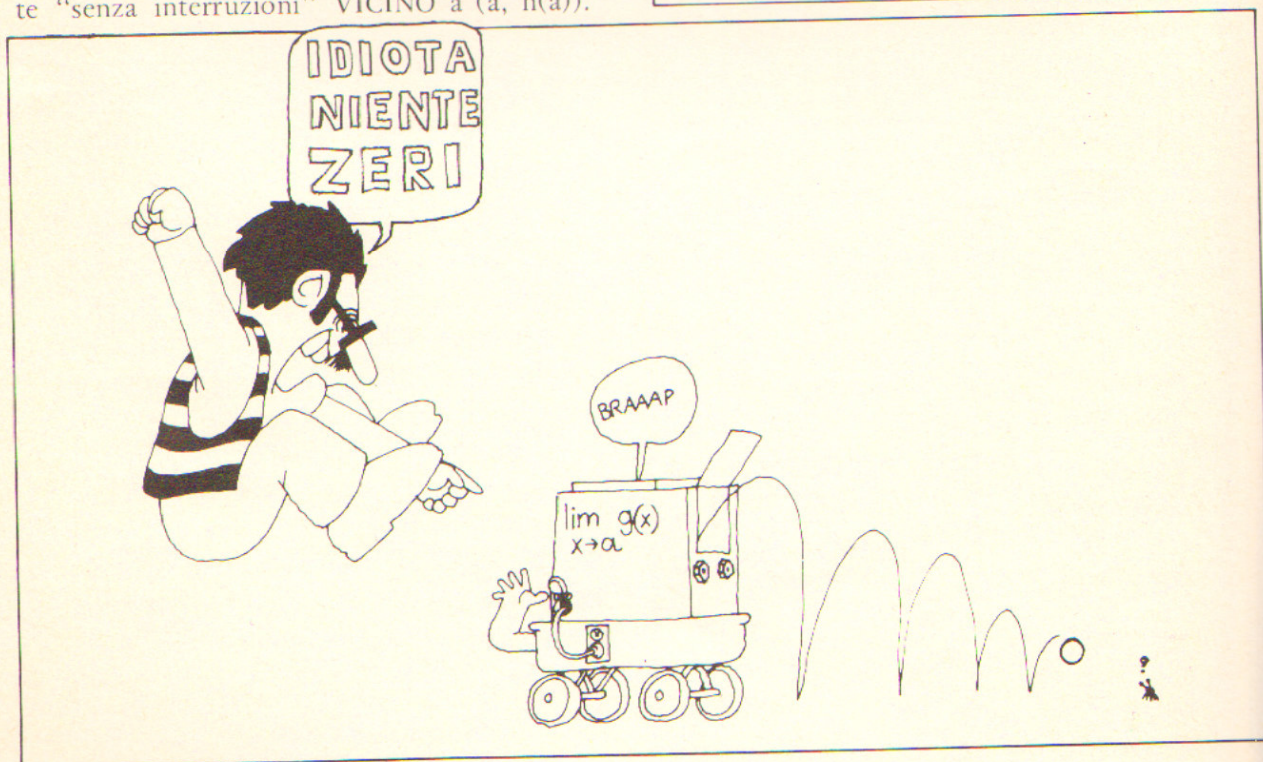
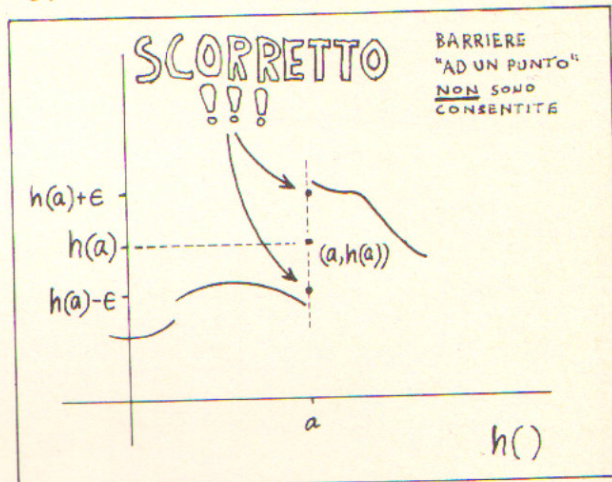
$(a, h(a) + \epsilon)$ e $(a, h(a) - \epsilon)$.

Ma questo non prova niente riguardo al fatto che il grafico di $h(\cdot)$ sia o meno effettivamente "senza interruzioni" VICINO a $(a, h(a))$.

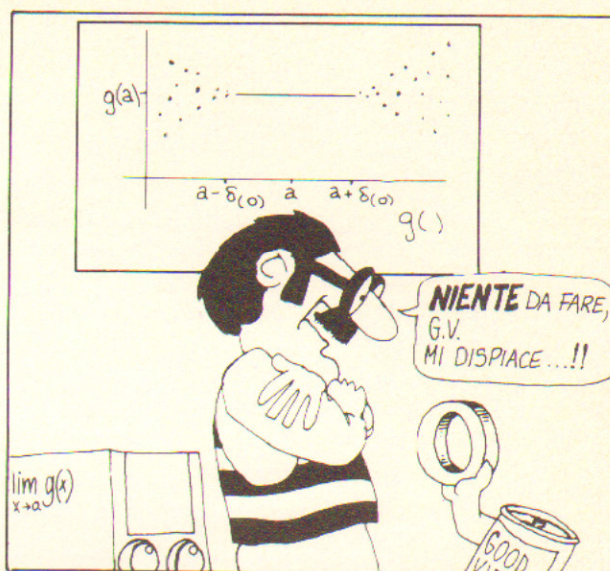
Così, siccome $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$ cerca di dimostrare che il grafico di $h(\cdot)$ è senza interruzioni VICINO a $(a, h(a))$, noi STABILIAMO PER LEGGE che $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$ deve sempre dare un intervallo di risposta

$(a - \delta(\epsilon), a + \delta(\epsilon))$

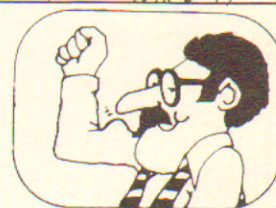
di lunghezza positiva, cioè, nella nostra definizione matematica ufficiale dobbiamo avere $\delta(\epsilon) > 0$ per OGNI numero di prova $\epsilon > 0$.



Vediamo cosa succederebbe se fosse consentito avere un intervallo di prova di lunghezza zero. Se venisse prodotto un $\delta(\epsilon)$ di misura positiva la garanzia per questo $\delta(\epsilon)$ implicherebbe che il grafico della funzione al disopra dell'intervallo $(a - \delta(\epsilon), a + \delta(\epsilon))$ sia una retta orizzontale. Quindi questo ragionamento potrebbe essere applicato soltanto alle funzioni che hanno per grafico rette orizzontali, e restringerebbe a tal punto la definizione di continuità che non sarebbe utilizzabile. (Come prima se poniamo $\delta(\epsilon) = 0$, finiamo per non riuscire a dire niente sulla continuità della funzione). Quindi dobbiamo avere $\epsilon > 0$ per approdare a qualche cosa.



ESERCIZI



II.3.1 Se $f(x) = 2(x) - 1$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ dà come risultato $\delta(\epsilon)$ con la formula $\delta(\epsilon) = 1/2 \epsilon$. Controllare la nostra GARANZIA; cioè passare da

$$SE \ 2 - \delta(\epsilon) < x < 2 + \delta(\epsilon)$$

ed ALLORA $f(2) - \epsilon < f(x) < f(2) + \epsilon$.

II.3.2 Se $f(x) = -3(x) + 5$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

dà come risultato $\delta(\epsilon) = 1/3 \epsilon$. Controllare la GARANZIA. (Non dimenticare che moltiplicando le disuguaglianze per un numero negativo si invertono i segni di disuguaglianza !)

II.3.3 Usando la stessa funzione di II.3.2, supponiamo che $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ dia invece come risultato $\delta(\epsilon) = 1/6 \epsilon$. Fate vedere che anche questo può essere garantito.

(Indicazione: fare uso del fatto che $1/2 \epsilon < \epsilon$ essendo $\epsilon > 0$).

$$SE \ 1 - 1/6 \epsilon < x < 1 + 1/6 \epsilon \quad \text{(ADESSO USARE L'ALGEBRA PER ANDARE AVANTI)}$$

$$ALLORA \ 2 - \epsilon < -3(x) + 5 < 2 + \epsilon.$$

Sperando che abbiate risolto correttamente il problema della garanzia, questo mostra che NON ci deve essere necessariamente un solo valore di $\delta(\epsilon)$ possono esserci molti modi di programmare una macchina per limiti affinché faccia vedere che la stessa funzione è continua nello stesso punto !

ESERCIZI



II.2.1 Quando McSquared ha inserito $1/8$ nella

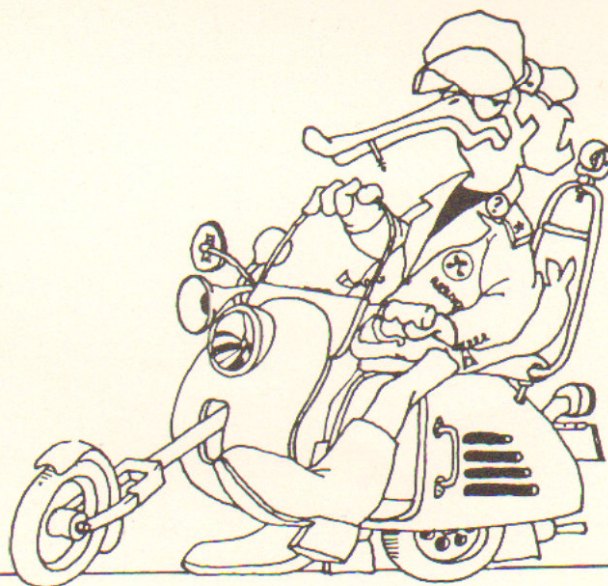


, il risultato è stato $1/4$. Controllate la garanzia, cioè passate da SE ad ALLORA con l'algebra.

$$\text{SE } 2 - 1/4 < x < 2 + 1/4.$$

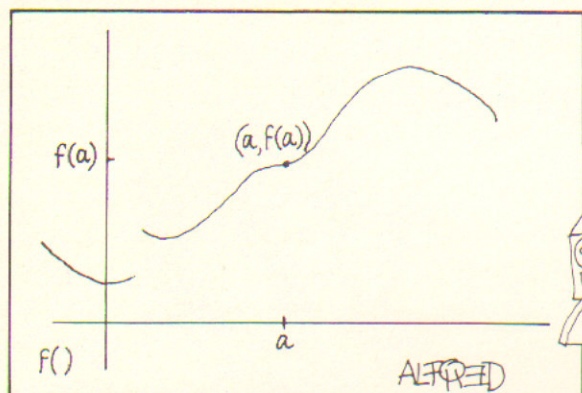
$$\text{ALLORA } 3 - 1/8 < 1/2 x + 2 < 3 + 1/8$$

II.2.2 Quando  suggeriva $1/1000$ come numero di sfida per il margine di errore, R.D. disse che $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ avrebbe dato come risultato un $1/500$ garantito. Controllate se questo è effettivamente garantito.

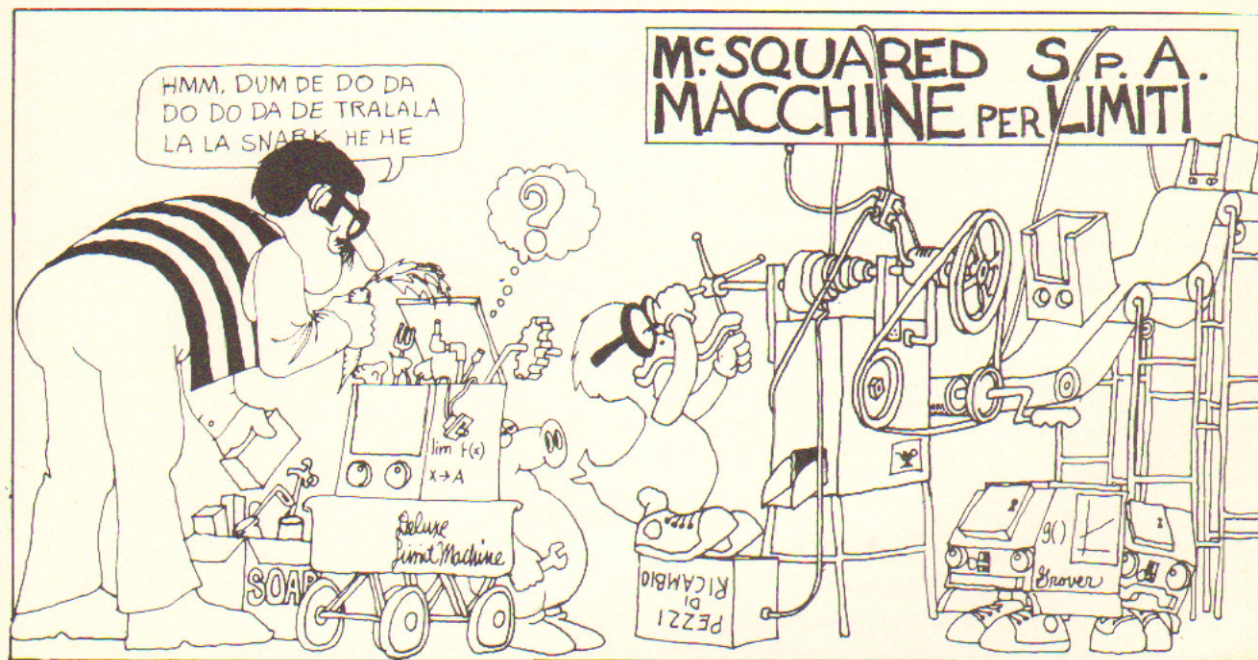


I 3 E

I matematici hanno fatto ricorso a questo astuto metodo "legislativo" per stabilire una procedura per trattare qualsiasi funzione il cui grafico si suppone regolare e senza interruzioni nei pressi di un punto $(a, f(a))$.



Non ci preoccupiamo se il grafico è VERAMENTE regolare e senza interruzioni vicino ad $(a, f(a))$ (nessuno lo saprà mai). Se possiamo costruire una macchina per limiti che fornisce un intervallo di risposta garantito per ogni scelta del numero che dà il margine di errore, STABILIAMO PER DEFINIZIONE che la nostra capacità di costruire tale macchina per limiti per $f(x)$ è una giustificazione sufficiente per affermare che il grafico di $f(x)$ è regolare e ininterrotto vicino ad $(a, f(a))$. Questo è il massimo che possiamo fare; se non altro possiamo costruire delle barriere.





Supponiamo che sia costruibile una macchina per limiti per $f(\cdot)$ vicino ad un punto $(a, f(a))$. (Per legge, questo significa che la funzione è regolare e ininterrotta vicino ad $(a, f(a))$.)

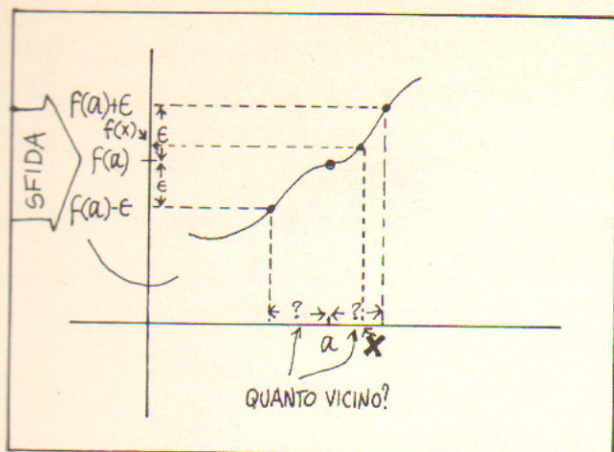
Per prima cosa la macchina per limiti (che si chiama $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$) viene sfidata con un certo numero positivo che rappresenta il margine di errore. Il simbolo matematico ufficiale che rappresenta questo margine di errore usato come sfida è "ε". (Si legge "epsilon").



Questa volta, quando McSquared inserisce nella macchina e invece di un numero vero e proprio



ciò costituisce una sfida tipo per la macchina per limiti, cioè gli chiede QUANTO VICINO ad a deve essere x affinché il risultato di ALFRED $f(x)$ sia abbastanza vicino ad $f(a)$ sull'asse y da essere compreso entro la particolare distanza rappresentativa che è data dal margine di errore ϵ .



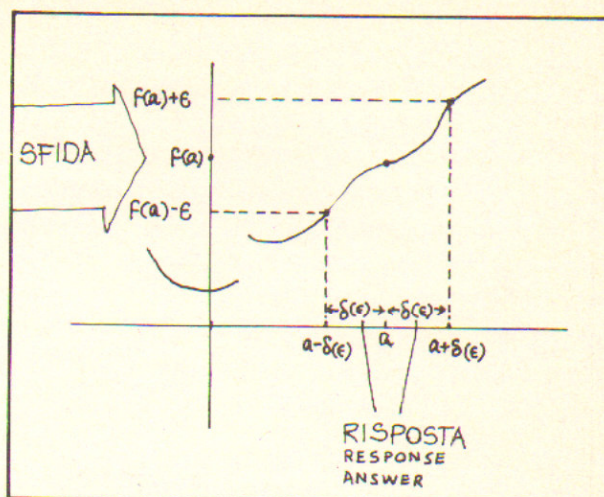
Che $f(x)$ si trovi entro questo margine ϵ da $f(a)$ significa semplicemente che $f(x)$ deve trovarsi all'interno di un segmento dell'asse y definito dalla disuguaglianza

$$f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon$$

La risposta a questo stimolo ϵ data dalla macchina per limiti è un altro simbolo " $\delta(\epsilon)$ " (si legge "delta con epsilon").



Questo simbolo $\delta(\epsilon)$ indica una distanza: è la risposta alla domanda "QUANTO VICINO...?"



Quando la macchina per limiti fornisce $\delta(\epsilon)$ **AFFERMA** che SE x è a una distanza compresa tra 0 e $\delta(\epsilon)$ da a , **ALLORA** il risultato $f(x)$ di **ALFRED** sarà abbastanza vicino ad $f(a)$ sull'asse y da essere compreso entro il margine di errore richiesto ϵ .

Se x dev'essere ad una distanza compresa tra 0 e $\delta(\epsilon)$ da a sull'asse x , allora x deve appartenere all'intervallo

$$(a - \delta(\epsilon), a + \delta(\epsilon))$$

che va da $a - \delta(\epsilon)$ fino al punto $a + \delta(\epsilon)$. Così questi x devono soddisfare la disuguaglianza

$$a - \delta(\epsilon) < x < a + \delta(\epsilon)$$

Questo simbolo " $\delta(\epsilon)$ " **NON** significa " δ " moltiplicato per " ϵ "; lo spazio in $\delta()$ è come lo spazio vuoto in " $f()$ ". La funzione $f()$ deve essere specificata da un numero, come 13, e produce un altro numero, detto " $f(13)$ ". $\delta()$ è il simbolo per la funzione della MACCHINA PER LIMITI, che deve essere specificata da un determinato margine di errore, come $1/2$, e quindi deve dare come risultato un altro numero che si chiama " $\delta(1/2)$ ". Non sappiamo ancora quale dev'essere questo numero, dal momento che non abbiamo una **FORMULA** esplicita per $\delta()$.

Riassumendo: quando viene messa alla prova da un margine di errore rappresentato da " ϵ ", la macchina per limiti, che è associata ad una funzione $f(\cdot)$ nel punto $x = a$, deve fornire una risposta rappresentativa con il simbolo " $\delta(\epsilon)$ ". La macchina per limiti quindi afferma che



La macchina **AFFERMA** che questo è vero e eventualmente deve essere in grado di dare una **GARANZIA** che lo **PROVI** realmente. Ma naturalmente una macchina per limiti non può nemmeno cominciare a dimostrare qualcosa senza conoscere esattamente

(1) la formula della particolare funzione in esame ,

(2) il numero " a " sull'asse x ,
e

(3) una **FORMULA** per $\delta(\epsilon)$,

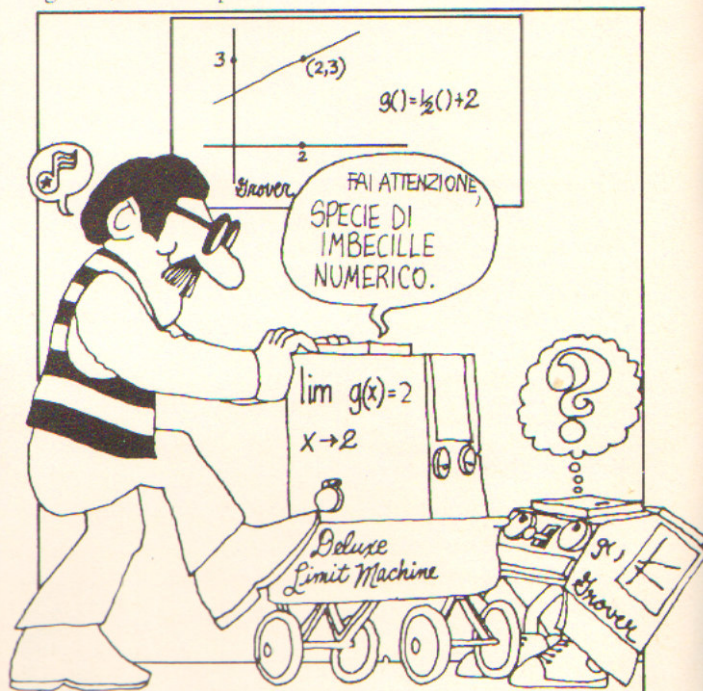
dal momento che una vera e propria dimostrazione si può costruire soltanto se disponiamo di questi dati.

90

Vediamo se possiamo scoprire come costruire una macchina per limiti associata alla funzione

$$g(\cdot) = 1/2 \cdot (\cdot) + 2$$

che Grover stava studiando nell'ultimo para-
grafo, dove il punto " a " è 2.

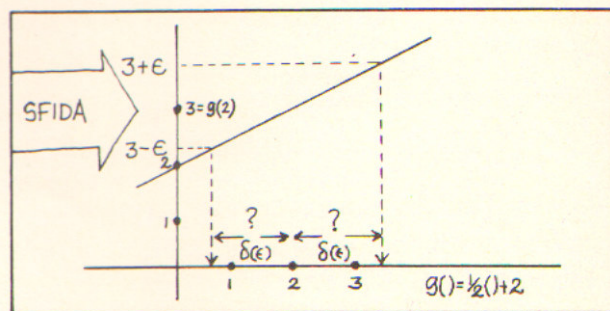


In questo caso,

$$g(a) = g(2) = 1/2 \cdot (2) + 2 = 3,$$

$$\text{e, } g(x) = 1/2(x) + 2.$$

Quindi il problema della macchina per limiti è stabilire con precisione quale deve essere la distanza $\delta(\epsilon)$ (in corrispondenza di un qualsiasi margine di errore ϵ piccolo a piacere) ...



tale che possa garantire che
SE prendiamo un qualsiasi x tale che

$$\overset{a}{\downarrow} 2 - \delta(\epsilon) < x < \overset{a}{\downarrow} 2 + \delta(\epsilon)$$

ALLORA, per quegli x ,

$$\underset{g(2)}{\uparrow} 3 - \epsilon < \underbrace{\frac{1}{2}(x) + 2}_{g(x)} < \underset{g(2)}{\uparrow} 3 + \epsilon.$$

Ma siccome ϵ sta per uno qualsiasi degli infiniti margini di errore di prova possibili, non può esserci una garanzia per le singole risposte a TUTTI i possibili numeri di prova, come purtroppo ha dovuto constatare McSquared nel paragrafo precedente. La cosa migliore che può fare una "prova" della garanzia è trovare una formula per $\delta(\epsilon)$ che esprime esattamente quale dovrebbe essere $\delta(\epsilon)$ per UN QUALSIASI ϵ di prova e poi usare l'algebra per arrivare da

$$\text{"SE } 2 - \delta(\epsilon) < x < 2 + \delta(\epsilon)\text{"}$$

$$\text{a "ALLORA } 3 - \epsilon < \frac{1}{2}(x) + 2 < 3 + \epsilon."$$

Se si trova la formula giusta per $\delta(\epsilon)$ allora QUANDO SI SOSTITUISCE AD ϵ UN DETERMINATO NUMERO DI PROVA, L'ALGEBRA CI DICE CHE IL RAGIONAMENTO SARA' SEMPRE VALIDO !!



Nell'ultimo paragrafo, ogni volta che McSquared inseriva nella macchina un numero di prova per il margine di errore nella



il numero che ne risultava era doppio del numero introdotto. Torniamo indietro: quando McSquared mise alla prova la macchina per limiti con $\frac{1}{2}$, il risultato fu 1 **GARANZIA** e la garanzia facendo uso

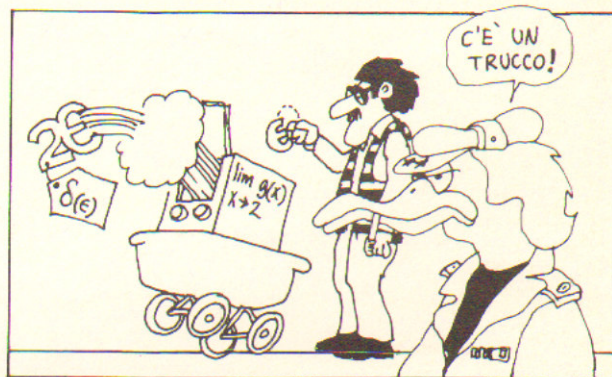
dell'algebra mostrava che 1 funzionava sul serio! Quindi, in questo caso, con un margine di errore di prova di $\frac{1}{2}$, la risposta $\delta(\frac{1}{2})=1$, che è uguale a $2 \cdot (\frac{1}{2})$ poteva effettivamente essere garantita!

Poi tentò con $1/4$, e ricevette la risposta $1/2$, che poteva essere garantita come al solito. Così, in questo caso $\delta(\frac{1}{4}) = 1/2$ (che è uguale a $2 \cdot (1/4)$!) (Notate come lo spazio vuoto in $\delta(\epsilon)$ viene riempito dal particolare valore di ϵ !) Quindi forse una buona STIMA per una FORMULA di $\delta(\epsilon)$ è che la risposta $\delta(\epsilon)$ sia sempre il DOPPIO dell' ϵ di prova, cioè

$$\delta(\epsilon) = 2(\epsilon)$$

o, in modo più convenzionale

$$\delta(\epsilon) = 2(\epsilon).$$



ADESSO CHE ABBIAMO UNA POSSIBILE FORMULA PER $\delta(\epsilon)$,
VEDIAMO SE POSSIAMO USARE L'ALGEBRA PER COMPLE-
TARE LA

★ GARANZIA! ★



★ SE PRENDIAMO UNA QUALSIASI x TALE CHE ... $2 - \delta(\epsilon) < x < 2 + \delta(\epsilon)$

★ ORA, SOSTITUENDO $2 \pm \epsilon$

A $\delta(\epsilon)$ (SICCOME $\delta(\epsilon) = 2\epsilon$) $2 - 2\epsilon < x < 2 + 2\epsilon$

(ORA USIAMO L'ALGEBRA SU QUESTO x PER AVERE $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$)

★ MOLTIPLICHIAMO PER $\frac{1}{2}$ PER AVERE

L' " $\frac{1}{2}$ " IN " $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$ " $\frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2\epsilon < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2\epsilon$

★ ... E SEMPLIFICHIAMO, ALLORA $1 - \epsilon < \frac{1}{2}x < 1 + \epsilon$

★ E SOMMIAMO 2 PER AVERE IL "2"

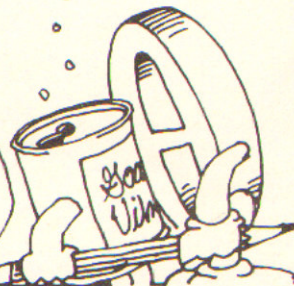
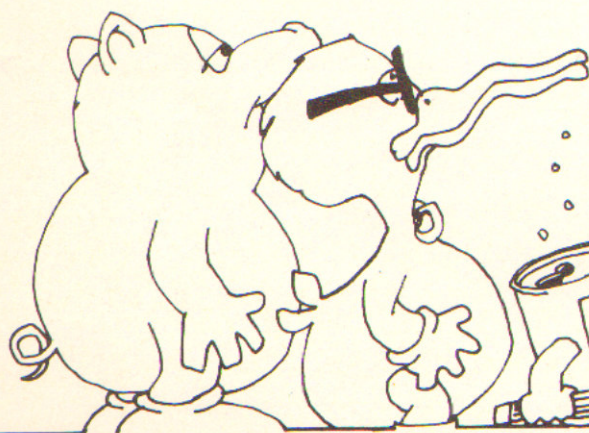
IN $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$ $2 + 1 - \epsilon < \frac{1}{2}x + 2 < 2 + 1 + \epsilon$

*** ALLORA $3 - \epsilon < \frac{1}{2}x + 2 < 3 + \epsilon$

OR
 $3 - \epsilon < g(x) < 3 + \epsilon$!

LA GARANZIA FUNZIONA! DAL MOMENTO CHE QUESTA
ALGEBRA VA PROPRIO BENE PER OGNI ϵ , OGNI VOLTA CHE MET-
TIAMO ALLA PROVA  CON UN DETERMINATO MARGINE DI

ERRORE QUALSIASI (NON SEMPLICE-
MENTE IL NUMERO ϵ), L'ALGEBRA
CI CONSENTE DI INSERIRE IL DOPIO DI QUEL NUMERO AL
POSTO DI $\delta(\epsilon)$ (DAL MOMENTO CHE ADESSO $\delta(\epsilon) = 2 \cdot (\epsilon)$) E
LA GARANZIA DEVE VALERE! L'ALGEBRA CI
ASSICURA CHE LE COSE STANNO
PROPRIO COSÌ !!!



ON
FUNZIONE

LA
DIREZIONE

Pertanto i matematici hanno dichiarato che il seguente RITUALE è una “dimostrazione” ufficialmente accettabile.

GERGO MATEMATICO UFFICIALE

DIMOSTRARE che il grafico di

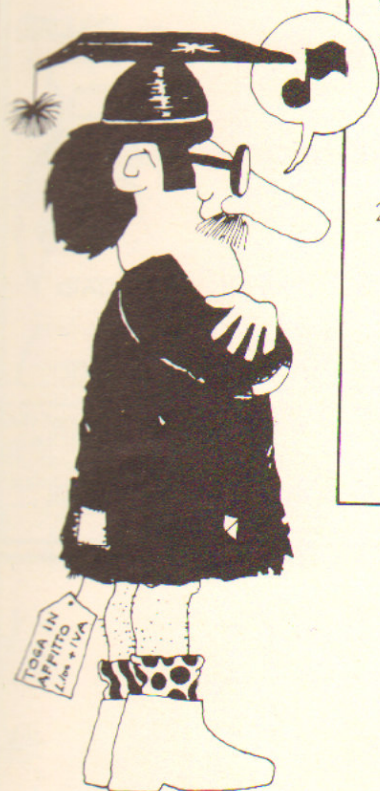
$$g(x) = 1/2 (x) + 2$$

è regolare e continua vicino a $(2, g(2))$.

1. Per ogni $\epsilon > 0$, sia $\delta_{(\epsilon)} = 2\epsilon$.
(Che è lo stesso di costruire la macchina per limiti “ $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ ” che produce due volte il numero “ ϵ ” con il quale è stato messo alla prova.)

2. Garanzia :
(Sostituendo 2ϵ a $\delta_{(\epsilon)}$)
(Moltiplicando per $1/2$)
(Sommando $+2$)
oppure, sostituendo ancora $g(x)$:
ALLORA $g(2) - \epsilon < g(x) < g(2) + \epsilon$

(E questo è tutto quello che è necessario nella garanzia !)



Adesso il professor McSquared inserirà tutta questa teoria sulle funzioni $f(x)$ in genere e i punti “a” in una Definizione Matematica Ufficiale ! Notate il termine “continua”, che viene usato al posto di “regolare e senza interruzioni”. (“Senza interruzioni” è una dizione certamente NON ufficiale).

DEFINIZIONE MATEMATICA UFFICIALE

SE $f()$ E' UNA FUNZIONE

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ESISTE E VALE $f(a)$
SE, PER OGNI NUMERO DI PROVA $\epsilon > 0$, C'E' UN NUMERO DI RISPOSTA $\delta(\epsilon) > 0$ TALE CHE, **SE** x SODDISFA ALLA CONDIZIONE $a - \delta(\epsilon) < x < a + \delta(\epsilon)$
ALLORA, PER QUEI VALORI DI x , $f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon$.

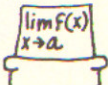
2. SI DICE CHE $f()$ E' CONTINUA NEL PUNTO $x=a$ SE $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ESISTE ED E' UGUALE A $f(a)$.

FACILE.

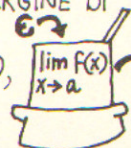
(TRADUZIONE CONFIDENZIALE)
E NON UFFICIALE

SE  E' UNA MACCHINA PER FUNZIONI,

1. UNA MACCHINA PER LIMITI GARANTITA ESISTE PER LA FUNZIONE $f()$ VICINO AD $(a, f(a))$ SE C'E' UNA

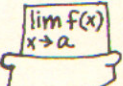
MACCHINA  CHE HA LA PROPRIETA'

CHE OGNI VOLTA CHE SI INSERISCE UN NUMERO DI PROVA PER IL MARGINE DI ERRORE CON IL

SIMBOLO $\epsilon > 0$,  SI HA COME RISULTATO

UN ALTRO NUMERO $\delta(\epsilon) > 0$ CHE E' GARANTITO IN QUESTO MODO: SE SI PRENDE UN QUALSIASI VALORE DI x CHE SODDISFA $a - \delta(\epsilon) < x < a + \delta(\epsilon)$ E LO

SI INSERISCE IN  ALLORA IL RISULTATO $f(x)$ SODDISFA $f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon$.

2. IL GRAFICO DI $f()$ E' REGOLARE E ININTERROTTO VICINO AD $(a, f(a))$ SE  ESISTE,

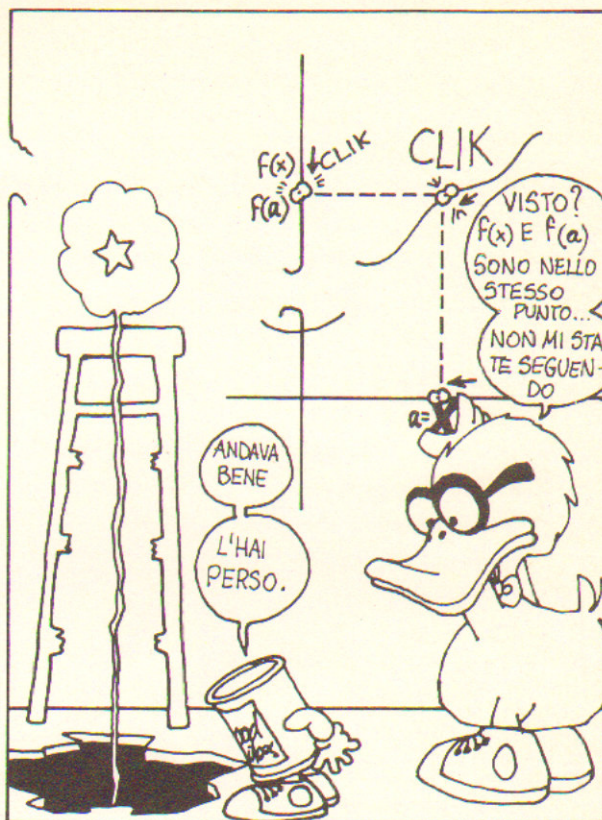
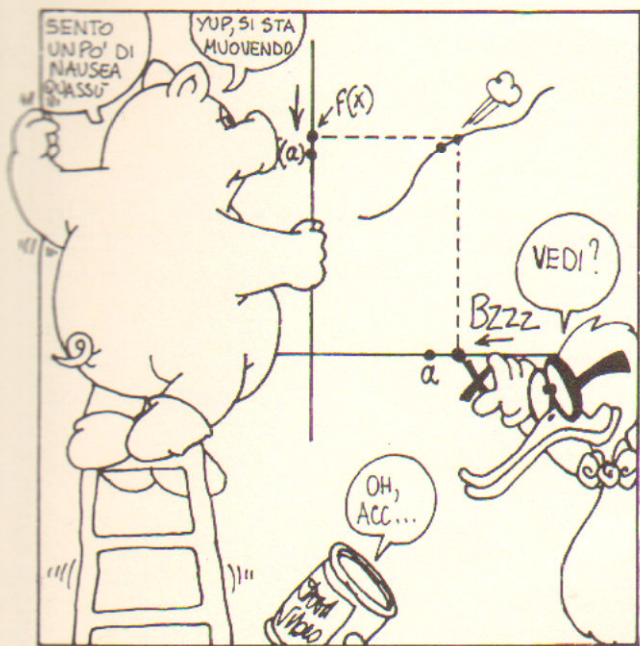
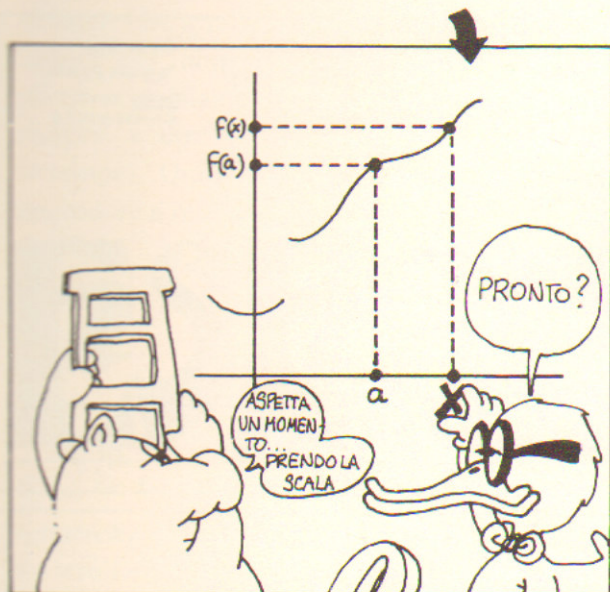
ED E' IN GRADO DI SVOLGERE QUESTE OPERAZIONI CON $\epsilon - \delta(\epsilon)$.



I matematici spesso riassumono tutto questo dicendo semplicemente "il limite di $f(x)$ per x che tende ad a è $f(a)$ " ovvero, in gergo,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

che ci riporta all'idea intuitiva che (se $f(\cdot)$ è regolare), quando x si avvicina ad a , $f(x)$ si avvicina ad $f(a)$ come al suo numero LIMITE.



Ma non possiamo mai andare tanto avanti da vedere veramente l'arrivo finale di x fino ad a e, nello stesso tempo, vedere l'arrivo di $f(x)$ fino ad $f(a)$!!! Invece dobbiamo accontentarci del significato LOGICO ufficiale di

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

che è sempre SOLO che esiste un'opportuna macchina per limiti. Allora, con questa macchina per limiti garantita, POSSIAMO far vedere che siamo in grado di ottenere $f(x)$ "tanto vicino ad $f(a)$ quanto si vuole" (che equivale a "entro un margine di errore ϵ qualsiasi") prendendo x "abbastanza vicino" ad a (basta rendere la distanza di x ad a minore di $\delta(\epsilon)$). Questo non è proprio la stessa cosa dell'idea intuitiva, ma è la cosa migliore che possiamo fare.

Dopo tutte queste cose un po' difficili, torniamo indietro un momento per esaminare un paio di proprietà delle definizioni ufficiali di limite e di continuità.

Gli intervalli di prova devono essere veri e propri intervalli di lunghezza positiva e per questo ϵ deve essere maggiore di zero. Anche $\delta(\epsilon)$ deve essere maggiore di zero. Questo perché una funzione qualsiasi $h(\cdot)$, sia che il suo grafico abbia o meno interruzioni vicino ad $(a, h(a))$, ha solo UN punto del suo grafico al disopra (o al disotto) di $x = a$, cioè $(a, h(a))$. Riguardate le regole per le funzioni: c'è solo una freccia di corrispondenza che parte da "a" nel dominio). Per ogni ϵ di prova potremo sempre "delimitare" il PUNTO $(a, h(a))$ con barriere "ad un punto" situate alle coordinate.

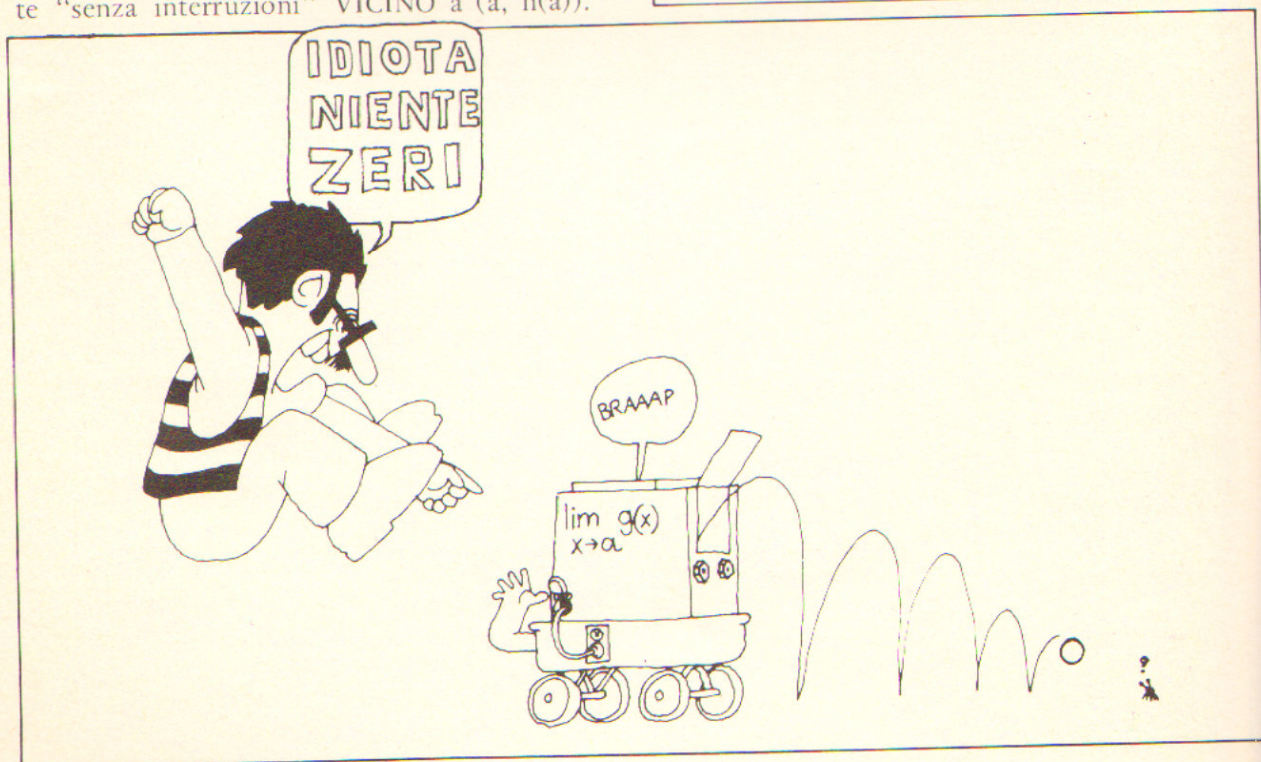
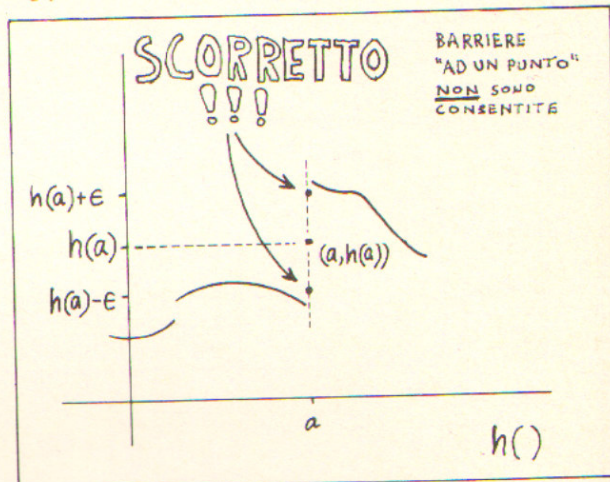
$(a, h(a) + \epsilon)$ e $(a, h(a) - \epsilon)$.

Ma questo non prova niente riguardo al fatto che il grafico di $h(\cdot)$ sia o meno effettivamente "senza interruzioni" VICINO a $(a, h(a))$.

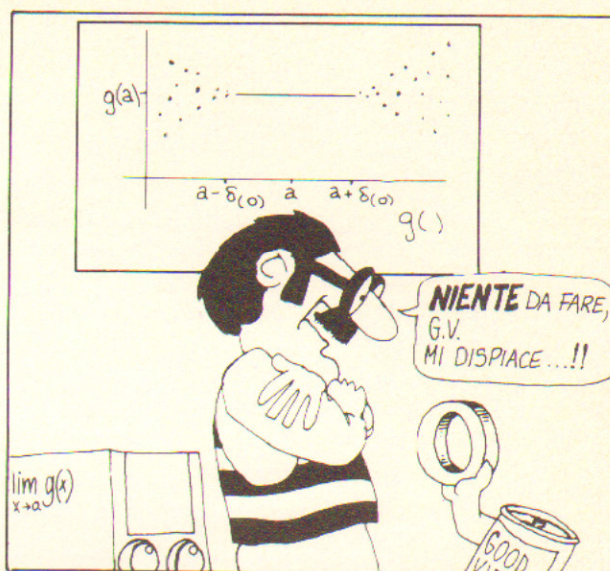
Così, siccome $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$ cerca di dimostrare che il grafico di $h(\cdot)$ è senza interruzioni VICINO a $(a, h(a))$, noi STABILIAMO PER LEGGE che $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$ deve sempre dare un intervallo di risposta

$(a - \delta(\epsilon), a + \delta(\epsilon))$

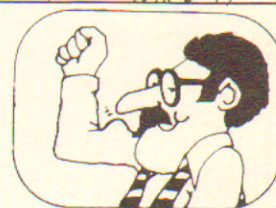
di lunghezza positiva, cioè, nella nostra definizione matematica ufficiale dobbiamo avere $\delta(\epsilon) > 0$ per OGNI numero di prova $\epsilon > 0$.



Vediamo cosa succederebbe se fosse consentito avere un intervallo di prova di lunghezza zero. Se venisse prodotto un $\delta(\epsilon)$ di misura positiva la garanzia per questo $\delta(\epsilon)$ implicherebbe che il grafico della funzione al disopra dell'intervallo $(a - \delta(\epsilon), a + \delta(\epsilon))$ sia una retta orizzontale. Quindi questo ragionamento potrebbe essere applicato soltanto alle funzioni che hanno per grafico rette orizzontali, e restringerebbe a tal punto la definizione di continuità che non sarebbe utilizzabile. (Come prima se poniamo $\delta(\epsilon) = 0$, finiamo per non riuscire a dire niente sulla continuità della funzione). Quindi dobbiamo avere $\epsilon > 0$ per approdare a qualche cosa.



ESERCIZI



II.3.1 Se $f(x) = 2(x) - 1$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ dà come risultato $\delta(\epsilon)$ con la formula $\delta(\epsilon) = 1/2 \epsilon$. Controllare la nostra GARANZIA; cioè passare da

$$SE \ 2 - \delta(\epsilon) < x < 2 + \delta(\epsilon)$$

ed ALLORA $f(2) - \epsilon < f(x) < f(2) + \epsilon$.

II.3.2 Se $f(x) = -3(x) + 5$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ dà come risultato $\delta(\epsilon) = 1/3 \epsilon$. Controllare la GARANZIA. (Non dimenticare che moltiplicando le disuguaglianze per un numero negativo si invertono i segni di disuguaglianza !)

II.3.3 Usando la stessa funzione di II.3.2, supponiamo che $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ dia invece come risultato $\delta(\epsilon) = 1/6 \epsilon$. Fate vedere che anche questo può essere garantito.

(Indicazione: fare uso del fatto che $1/2 \epsilon < \epsilon$ essendo $\epsilon > 0$).

$$SE \ 1 - 1/6 \epsilon < x < 1 + 1/6 \epsilon \quad \text{(ADESSO USARE L'ALGEBRA PER ANDARE AVANTI)}$$

$$ALLORA \ 2 - \epsilon < -3(x) + 5 < 2 + \epsilon.$$

Sperando che abbiate risolto correttamente il problema della garanzia, questo mostra che NON ci deve essere necessariamente un solo valore di $\delta(\epsilon)$ possono esserci molti modi di programmare una macchina per limiti affinché faccia vedere che la stessa funzione è continua nello stesso punto !

I-4 CALCOLI (SEGRETI)

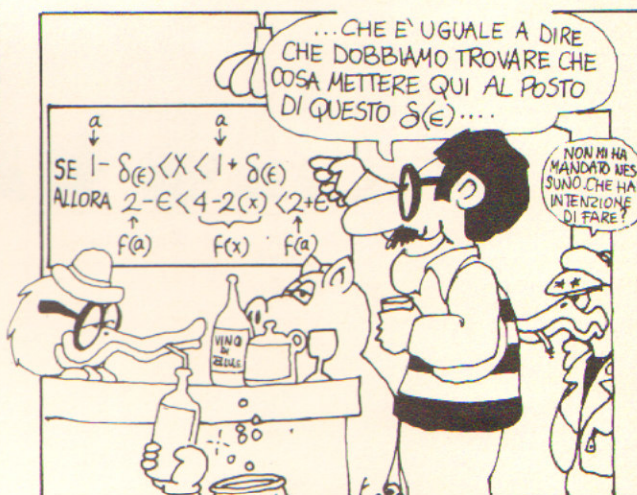
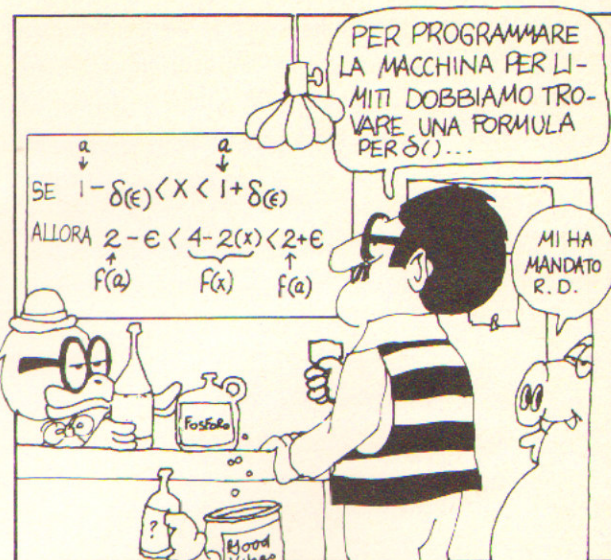
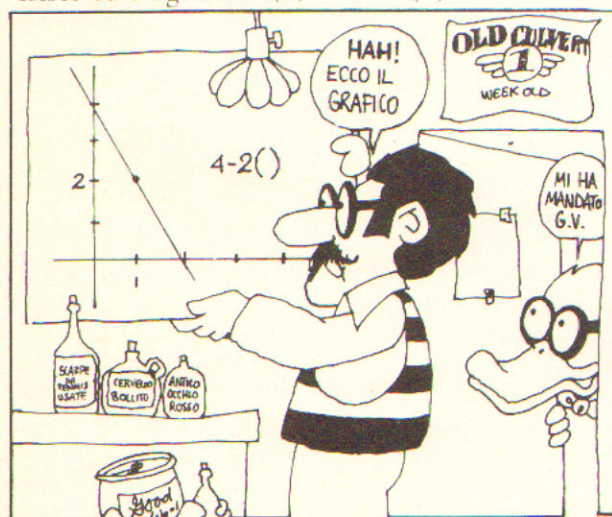


McSquared cercherà di risolvere il seguente problema: cercherà di DIMOSTRARE che la funzione

$$f(x) = 4 - 2(x)$$

è continua nel punto $x = 1$, che poi è la stessa cosa che cercare di far vedere che

$\lim_{x \rightarrow 1} 4 - 2(x)$ esiste ed è uguale a $f(1) = 4 - 2(1) = 2$.



NEL **CALCOLO SEGRETO** USIAMO UNA SERIE DI "COME SAREBBE BELLO SE" CHE COMINCIANDO DA "ALLORA" E CERCANDO DI TORNARE A "SE"... IL TRUCCO È USARE L'ALGEBRA NELLE DISEGUAGLIANZE PER CERCARE DI ISOLARE x ... **QUINDI ANDATE ALLA FINE DELLA PAGINA E LEGGETE VERSO L'ALTO!**



PERCHÉ NO? PONIAMO $\delta(\epsilon) = \frac{1}{2}\epsilon$!

COME SAREBBE BELLO! SE POTESIMO SEMPLICEMENTE SOSTITUIRE $\delta(\epsilon)$ A $\epsilon/2$ QUESTA ESPRESSIONE DIVENTEREBBE

$$SE \ 1 - \delta(\epsilon) < x < 1 + \delta(\epsilon)$$

O, EQUIVALENTEMENTE (INVERTIRE TUTTA LA DISEGUAGLIANZA), COME SAREBBE BELLO SE

$$1 - \epsilon/2 < x < 1 + \epsilon/2$$

O, ALLO STESSO MODO (SEMPLIFICARE: x RESTA DA SOLO) COME SAREBBE BELLO SE

$$1 + \epsilon/2 > x > 1 - \epsilon/2$$

OPPURE, (MOLTIPLICARE PER $(-1/2)$): COSÌ ELIMINIAMO "-2" IN " $-2x$ ". ATTENZIONE - COSÌ SI INVERTONO I SEGNI DI DISEGUAGLIANZA). COME SAREBBE BELLO SE

$$(1/2)(x-2) - (1/2)\epsilon > (1/2)(-2x) \times (1/2)(-2) + (1/2)\epsilon$$

O, ANCHE, (SOMMARE -4 PER ELIMINARE "4" IN " $-4-2x$ ") COME SAREBBE BELLO SE

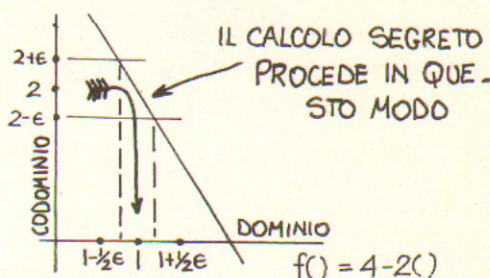
$$-2 - \epsilon < -2x < -2 + \epsilon$$

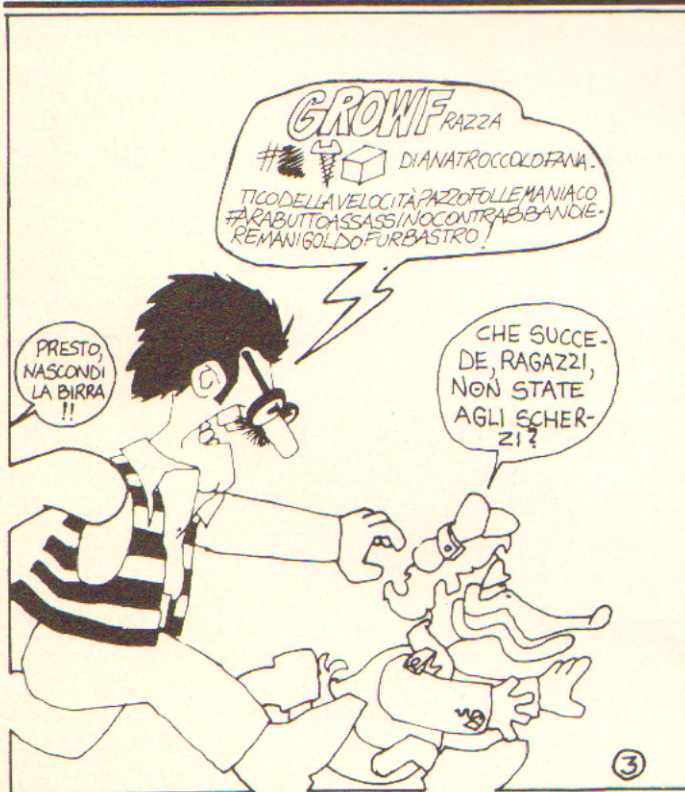
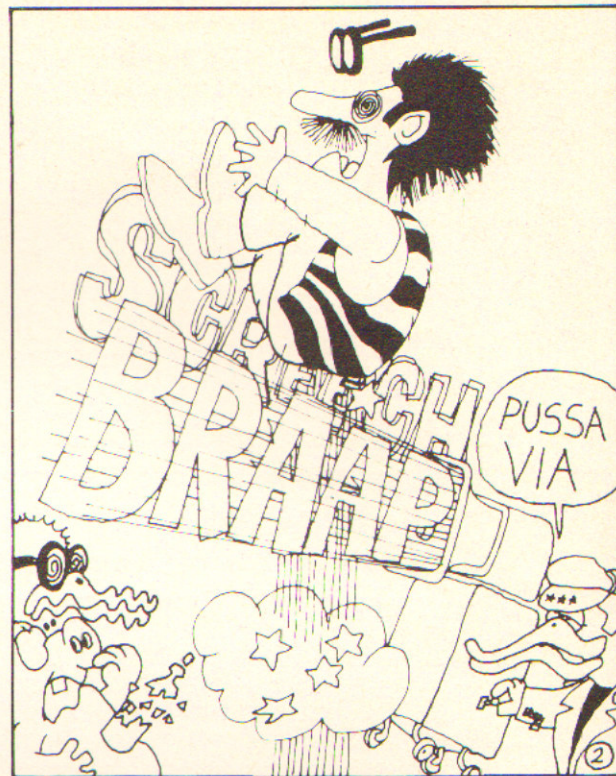
COME SAREBBE BELLO SE SOLO POTESIMO CAPACI DI DIMOSTRARE QUESTO

$$ALLORA \ 2 - \epsilon < 4 - 2x < 2 + \epsilon$$

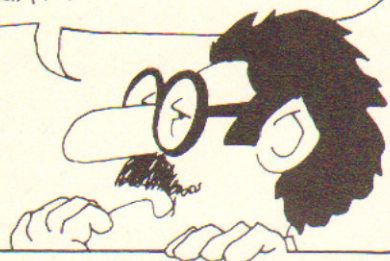


Il calcolo segreto comincia con l'intervallo di prova $(2 - \epsilon, 2 + \epsilon)$ nel codominio di $f(\)$ e scopre dove "svolta" verso il basso arrivando ad un tratto del dominio di $f(\)$.

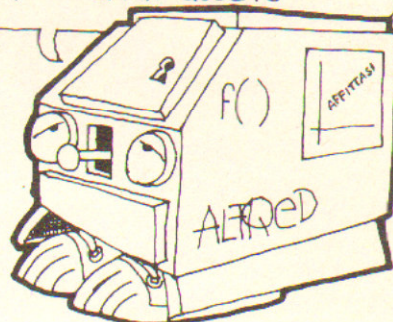




SIAMO ARRIVATI A VEDERE COME SAREBBE **BELLO** SE $\delta(\epsilon) = \frac{1}{2}(\epsilon)$, POICHÉ SE QUESTO FOSSE VERO, POTREMMO SENZ'ALTRO ROVESCIARE IL RAGIONAMENTO "COME SAREBBE **BELLO** SE" E FINIRE CON UNA PROVA DELLA GARANZIA...



PURTROPPO PENSO CHE MIA MADRE C'ENTRI QUALCOSA IN QUESTO



MA POSSIAMO FARSI CHE:

$\delta(\epsilon) = \frac{1}{2}(\epsilon)$ SEMPLICEMENTE PROGRAMMANDO $\lim_{x \rightarrow 1} 4-2x$

CON LA FORMULA $\delta(\epsilon) = \frac{1}{2}(\epsilon)$! QUESTO RENDE POSSIBILE COSTRUIRE LA MACCHINA PER LIMITI, CHE È PROPRIO QUELLO CHE VOLEVAMO FARE! CONTROLLIAMO LA GARANZIA-DOVREBBE FUNZIONARE SE IL CALCOLO SEGRETO È REVERSIBILE.

PROVA UFFICIALE

CHE $\lim_{x \rightarrow 1} 4-2(x)$ ESISTE ED È UGUALE A 2.

1. PER OGNI $\epsilon > 0$, SIA $\delta(\epsilon) = \frac{1}{2}\epsilon$

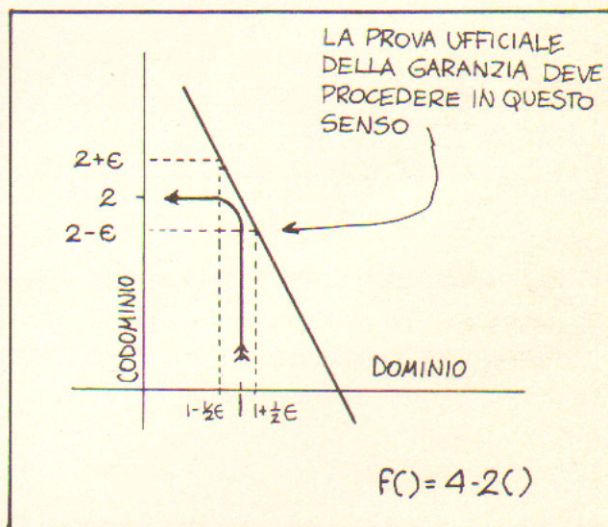
2. SE $1 - \frac{1}{2}\epsilon < x < 1 + \frac{1}{2}\epsilon$

(ADESSO CERCHIAMO DI OTTENERE $f(x) = 4-2(x)$ MANIPOLANDO LA DISEGUAGLIANZA CON L'ALGEBRA)

(MOLTIPLICHIAMO PER (-2) PER OTTENERE $-2x$)
IN $f(x) = 4-2x$

(SOMMIAMO 4 PER AVERE IL "4" IN $f(x) = 4-2x$)
ALLORA $2+\epsilon > 4-2(x) > 2-\epsilon$
Garantito!

Sebbene il Calcolo Segreto parta dalla ϵ e di prova nel CODOMINIO di $f()$ per TORNARE all'intervallo di risposta nel DOMINIO, la Prova Ufficiale della garanzia deve procedere sempre in senso opposto: dalla x dell'intervallo di risposta (nel dominio) a certi $f(x)$ (nel codominio), che sperabilmente ricadono nell'intervallo di prova. Questa è la stessa direzione in cui vanno le frecce nella definizione originaria delle funzioni.



ESERCIZI



Dimostrare che le seguenti funzioni sono continue per gli assegnati valori di "a". Secondo la definizione matematica ufficiale stabilita, questo significa che si deve far vedere che $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ esiste ed è uguale ad $f(a)$ costruendo un'opportuna macchina per limiti che dà una formula per $\delta(\epsilon)$ in termini di ϵ , e poi dimostrando la necessaria garanzia. I calcoli segreti dovrebbero essere nascosti dietro le parentesi. Qui è svolto un esempio:

PROBLEMA: Dimostrare che $f(x) = 3(x) - 2$ è continua nel punto $x = 2$.

Traduzione: Dimostrare che $\lim_{x \rightarrow 2} 3(x) - 2$ esiste ed è uguale a $f(2) = 3(2) - 2 = 4$.

1. Per ogni $\epsilon > 0$, sia $\delta(\epsilon) = 1/3 \epsilon$.

2. Se $2 - 1/3 \epsilon < x < 2 + 1/3 \epsilon$
(ora inseriamo
 $f(x) = 3(x) - 2$)

(per 3) $6 - \epsilon < 3(x) < 6 + \epsilon$

(più -2) $4 - \epsilon < 3(x) - 2 < 4 + \epsilon$

e questo è proprio quanto volevamo fosse garantito !

Calcolo Segreto: Cominciare con ALLORA e procedere all'indietro verso SE. Cercare di ottenere x da solo tra $2 - (?)$ e $2 + (?)$. Perché $2 - ?$ E' il numero che si trova qui: $\lim_{x \rightarrow 2} 3(x) - 2$

SE $2 - \delta(\epsilon) < x < 2 + \delta(\epsilon)$

COME SAREBBE BELLO SE $\delta(\epsilon) = 1/3 \epsilon$!!!

(per 1/3) $2 - 1/3 \epsilon < x < 2 + 1/3 \epsilon$

(più +2) $6 - \epsilon < 3(x) < 6 + \epsilon$

ALLORA $4 - \epsilon < 3(x) - 2 < 4 + \epsilon$

Notate che le disuguaglianze nel calcolo segreto e nella dimostrazione ufficiale sono esattamente le stesse ! Solo le spiegazioni dei passaggi sono diverse. Dopo essersi esercitati con alcune dimostrazioni, generalmente non c'è più bisogno di scrivere a lato il calcolo segreto. Basta scrivere le disuguaglianze nella garanzia ufficiale dal basso in alto !

II.4.1 Dimostrare che $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ è continua nel punto $x = 4$.

II.4.2 Dimostrare che $f(x) = -\frac{1}{9}x + 5$ è continua nel punto $x = -3$.

II.4.3 Dimostrare che $f(x) = 27 - \frac{1}{10}x$ è continua nel punto $x = 5$.

Forse avrete notato che una formula che sembra funzionare sempre è porre.

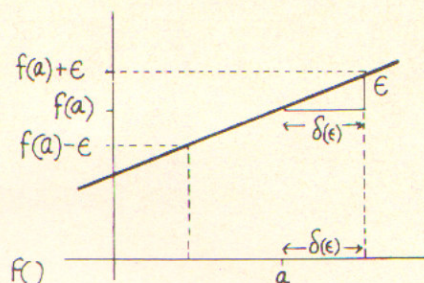
$$\delta(\epsilon) = \frac{1}{|\text{coeff. ang. della retta}|} \cdot (\epsilon)$$

Questo SARA' effettivamente O.K., ma solo per le rette ! Controlliamolo: dal disegno,

$$(\text{coeff. ang.} = \frac{\text{altezza}}{\text{base}} = \frac{\epsilon}{\delta(\epsilon)})$$

e si può risolvere questa espressione rispetto a $\delta(\epsilon)$ ottenendo

$$\delta(\epsilon) = \frac{1}{\text{coeff. ang.}} \cdot (\epsilon) !$$

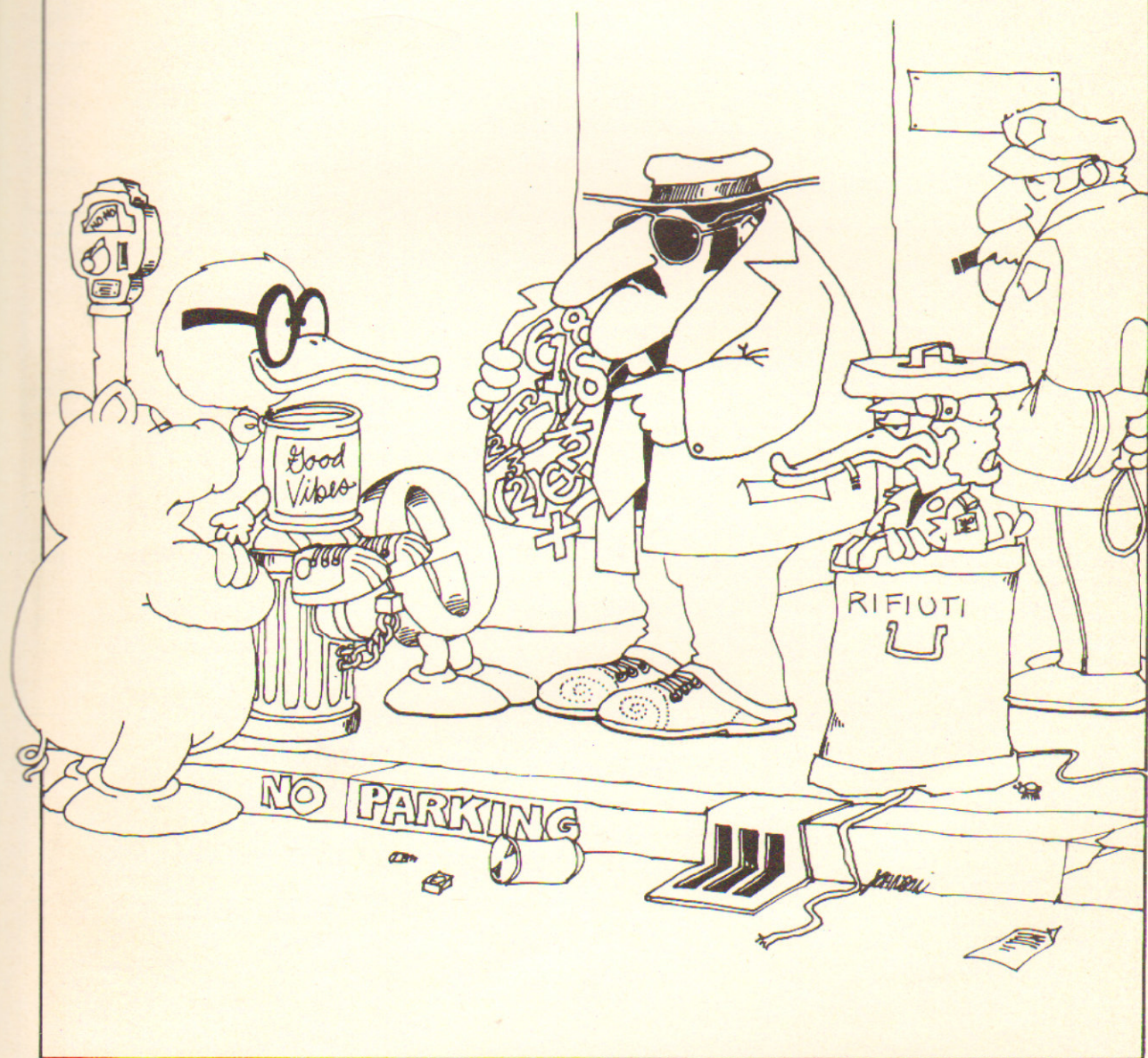


(Ma ricordatevi che altri $\delta(\epsilon)$ diversi possono andare altrettanto bene — fino a che riuscite ad ottenere una garanzia corretta).

II.4.4. Dimostrare che $f(x) = 2x + 7$ è continua nel punto $x = a$ per UN QUALSIASI numero reale a .

II.4.5 Dimostrare che $f(x) = 16 - 1/2x$ è continua nel punto $x = a$ per ogni numero reale a .

RISPOSTE



I.2.1 Se $A = \{\text{cubo}, \text{cilindro}, 6, \theta\}$,
 $B = \{\theta, 2, \Omega\}$, $C = \{3, 6, \Omega, \text{cubo}\}$
 $D = \{\text{cubo}, 3, \theta\}$.

Determinare
 (a) $A \cap C = \{?\} = \{6, \text{cubo}\}$

(b) $B \cup C = \{?\} = \{\theta, 2, \Omega, 3, 6, \text{cubo}\}$

(c) $B \cap D = \{?\} = \emptyset = \{\}$

(d) $C \cap \emptyset = \{?\} = \emptyset = \{\}$

(e) $C \cup \emptyset = \{?\} = C = \{3, 6, \Omega, \text{cubo}\}$

I.2.2 $A \cup (B \cap C) =$
 $\{\text{cubo}, 6, \theta\} \cup \{\Omega\} =$
 $\{\text{cubo}, 6, \theta, \Omega\}$

Questo risultato dovrebbe essere diverso da $(A \cup B) \cap C$. Bisogna fare attenzione nel cambiare di posto le parentesi.

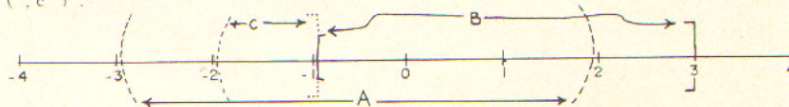
I.2.3 $(A \cap B) \cap C =$
 $\{\theta\} \cap \{3, 6, \Omega, \text{cubo}\} = \emptyset$

I.2.4 $(A \cap C) \cup (B \cap C) =$
 $\{6, \text{cubo}\} \cup \{\Omega\} = \{6, \text{cubo}, \Omega\}$

I.2.5 $(A \cup B) \cap (A \cup C) =$
 $\{\text{cubo}, 6, \theta, 2, \Omega\} \cap$
 $\{\text{cubo}, 6, \theta, 3, \Omega\}$
 $= \{\text{cubo}, 6, \theta, \Omega\}$



Sia $A = (-3, 2)$, $B = [-1, 3]$ e $C = (-2, -1]$. Indicate A, B, e C sull'asse reale e rispondete alle domande date qui di seguito; scrivete le risposte usando sia la notazione insiemistica con le parentesi graffe $\{\}$ che la notazione più breve con combinazioni di "[", "]", e di "<", ">", "<=", ">=".



I.3.1 $A \cap C = C = \{x \in \mathbb{R}; -2 < x \leq -1\}$

I.3.2 $A \cup C = A = \{x \in \mathbb{R}; -3 < x < 2\}$

I.3.3 $B \cap C = [-1, -1] = \{-1\}$

I.3.4 $B \cup C = (-2, 3] = \{x \in \mathbb{R}; -2 < x \leq 3\}$

I.3.5 $(B \cup C) \cap A = (-2, 2) =$
 $\{x \in \mathbb{R}; -2 < x < 2\}$

I.3.6 $(B \cap C) \cap A = [-1, -1] = \{-1\}$

I.3.7 $A \cup (B \cap C) = A$

I.3.8 $(A \cap B) \cup C = (-2, 2) =$
 $\{x \in \mathbb{R}; -2 < x < 2\}$

I.3.9 Se gli x soddisfano a
 $-2 < x \leq 1$,

a quale disuguaglianza soddisfano i $2x$?

$$-4 < 2x \leq 2$$

Quale disuguaglianza vale per l'insieme dei $(1/2)x$?

$$-1 < \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2}$$

Quale disuguaglianza vale per l'insieme dei $(3x)$?

$$6 > -3x \geq -3$$

OVERO $-3 \leq -3x < 6$

I.3.10 Se gli x soddisfano a
 $1 \geq x > -3/2$,

quale disuguaglianza varrà per l'insieme dei $2x$?

$$-2 \geq 2x > -3$$

OVERO $-3 < 2x \leq -2$

Quale disuguaglianza varrà per l'insieme dei $(1/2)x$?

$$-\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}x > -\frac{3}{4}$$

OVERO $-\frac{3}{4} < \frac{1}{2}x \leq -\frac{1}{2}$

Quale disuguaglianza varrà per l'insieme dei $(3x)$?

$$3 \leq -3x < 9/2$$

I.3.11 Sommare -4 a ogni numero dell'insieme $\{x \mid x \in \mathbb{R}; -5 \leq x < 4\}$.

Quale intervallo si ottiene?

$$\{x - 4 \mid x \in \mathbb{R}; -5 \leq x < 4\} = [-9, 0)$$

I.3.12 Sommare $3/2$ a ogni numero in $\{x \mid x \in \mathbb{R}; 2 \geq x > -1\}$.

Quale intervallo si ottiene?

$$\{x + \frac{3}{2} \mid x \in \mathbb{R}; 2 \geq x > -1\} =$$

 $(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}]$

I.3.13 Quale intervallo numerico è descritto dalla disuguaglianza

$$|1 - x| < 2?$$

TRASFORMARLO IN $-2 < 1 - x < 2$.

ALLORA $-3 < -x < 1$ OVERO, $3 > x > -1$;

INTERVALLO = $(-1, 3)$

I.3.14 Quale intervallo numerico è descritto dalla disuguaglianza

$$|2x + 3| < 4?$$

TRASFORMARLO IN $-4 < 2x + 3 < 4$.

ALLORA $-7 < 2x < 1$ OVERO, $-7/2 < x < 1/2$;

INTERVALLO = $(-7/2, 1/2)$

I.3.15 Quale intervallo numerico è descritto dalla disuguaglianza

$$|-3 - 1/2 x| < 5?$$

TRASFORMARLO IN: $-5 < -3 - 1/2 x < 5$;

ALLORA $-2 < -1/2 x < 8$

OVERO, $4 > x > -16$; INTERVALLO = $(-16, 4)$

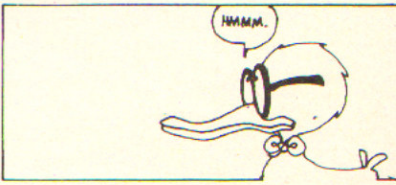
I.3.16 Quale intervallo numerico è descritto dalla disuguaglianza

$$|2/3 x + 4| < 1/2?$$

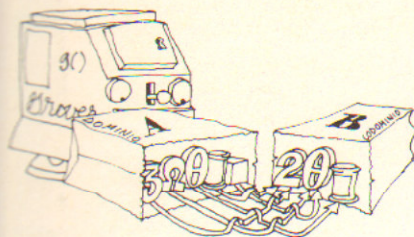
TRASFORMARLO IN: $-1/2 < 2/3 x + 4 < 1/2$

$-9/2 < 2/3 x < -7/2$;

$(-9/2) \cdot (3/2) < x < (-7/2) \cdot (3/2)$; INTERVALLO $(-27/4, -21/4)$



Questo è Grover che lavora un'altra funzione g .



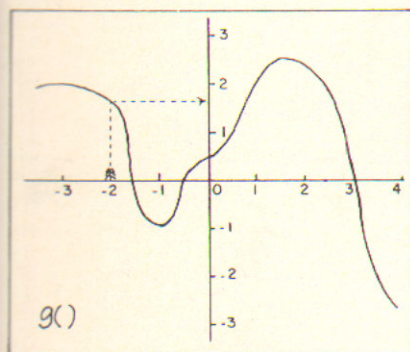
Provate a sostituire tutti i "?".

$$g(\boxed{1}) = ? \quad g(3) = ? \quad 2$$

$$g(\boxed{0}) = ? \quad g(\ominus ?) = \boxed{0}$$

$$g(\boxed{?}) = \ominus$$

È possibile trovare un'altra risposta a $g(?) = \ominus$?



Troviamo che $g(-2)$ è circa $5/3$.

Adesso provate voi con qualche valore?

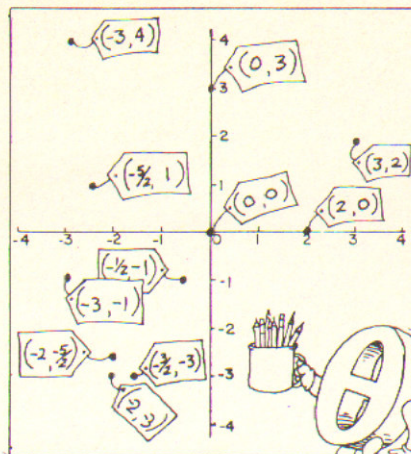
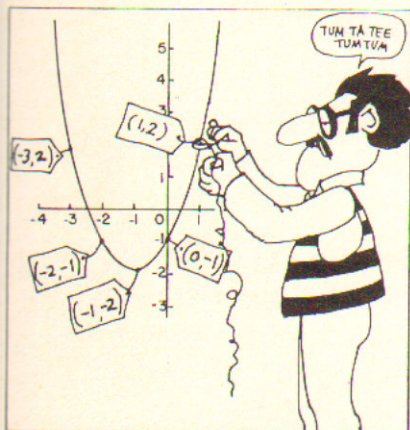
$$g(-1) = -1 \quad g(0) = \frac{1}{2} \quad ?$$

$$g(\frac{1}{2}) = 1 \quad g(3) = 0 \quad ?$$

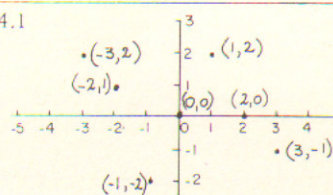
$$g(\frac{3}{2}) = -2 \quad g(\frac{3}{2}) = 0$$

$$g(1) = 2 \quad g(\frac{2}{3}) = 2$$

$$g(-3) = 2$$



1.4.1



(a) Date un'etichetta ai punti.

(b) Se i punti rappresentano una funzione, trovate

$$f(3) = ? \quad -1$$

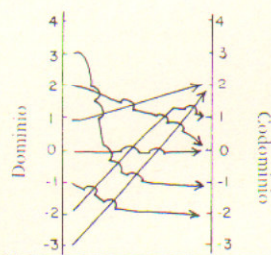
$$f(-3) = ? \quad 2$$

$$f(1) = ? \quad 2$$

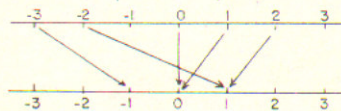
$$f(2) = ? \quad 0$$

$$f(0) = ? \quad 0$$

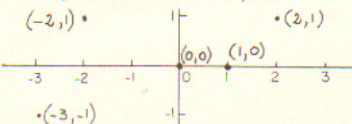
(c) Disegnare le frecce che indicano la corrispondenza tra elementi del dominio e elementi del codominio in questa funzione.



1.4.2 Se $f()$ è questa corrispondenza:



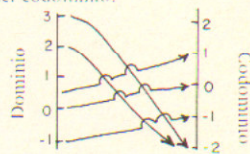
tracciate il suo grafico e date un'etichetta ai punti del grafico. (Sono solo 5 punti.)



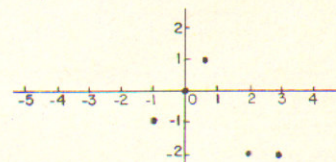
1.4.3 Se il dominio di $f()$ è $\{-1, 0, \frac{1}{2}, 2, 3\}$

e $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$, $f(1/2) = 1$, $f(2) = -2$ e $f(3) = -2$.

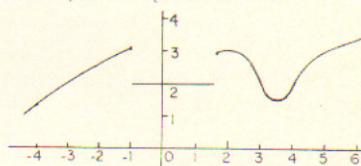
(a) Disegnare le frecce che indicano la corrispondenza tra elementi del dominio e elementi del codominio.



(b) Disegnare il grafico di $f()$. (Sono solo 5 punti.)



1.4.4 Se questo è il grafico di $f()$,



trovare

$$(a) f(2) = ? \quad 3$$

$$(b) f(-2) = ? \quad 2\frac{1}{2}$$

(c) Se x è un numero arbitrario in

$$(0, 1) = \{x \mid x \in \mathbb{R}; 0 < x < 1\},$$

trovare $f(x) = ? \quad 2$

$$(d) f(?) = 3 \quad \text{RISP: } -1 \text{ O VERO } 2 \text{ O VERO } 5$$

$$(e) f(?) = 5/2 \quad \text{RISP: } -2 \text{ O VERO } 2\frac{3}{4} \text{ O VERO } 4\frac{1}{2}$$

$$(f) f(?) = 2 \quad \text{RISP: OGNI } x \text{ IN } (-1, 1\frac{3}{5})$$

1.4.5

Espressione simbolica:

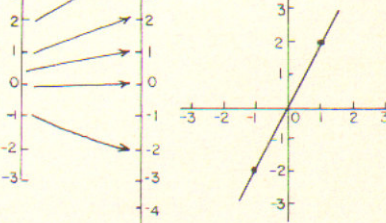
$$f() = 2 \cdot ()$$

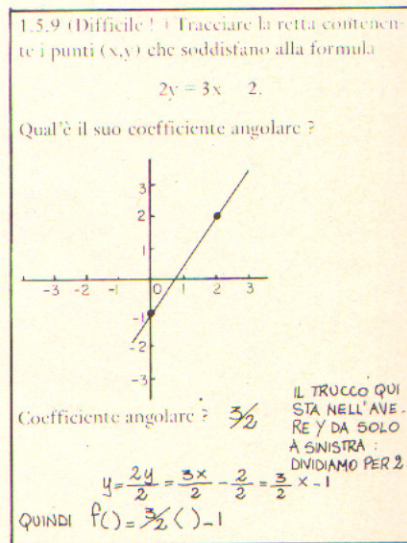
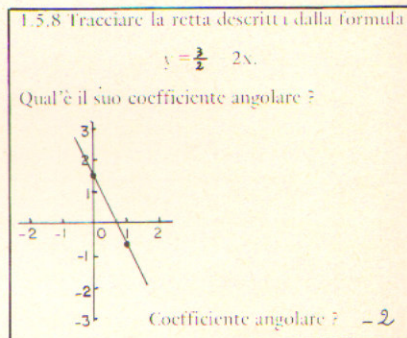
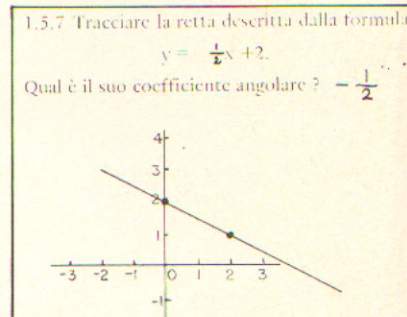
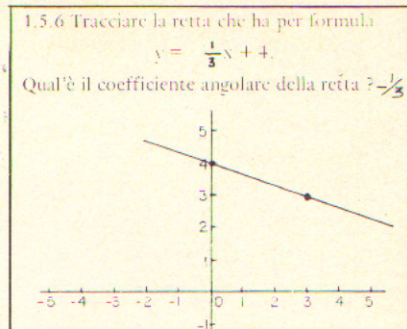
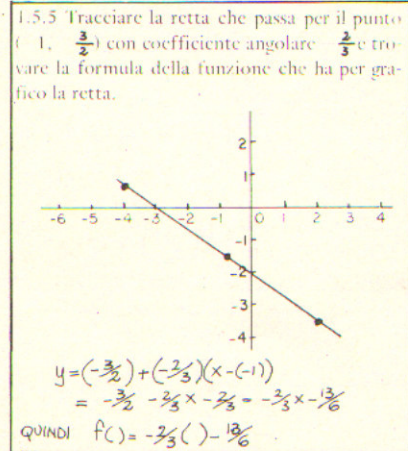
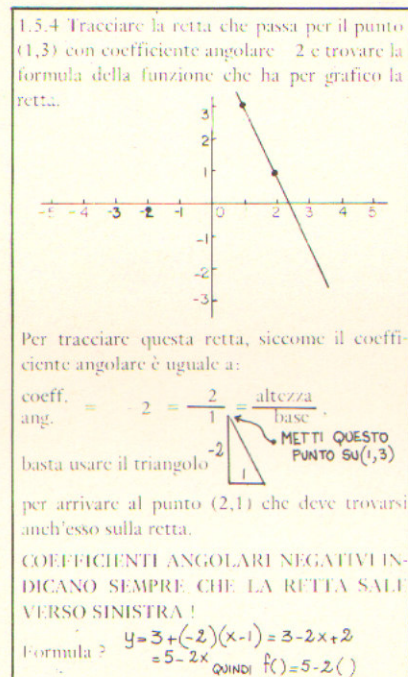
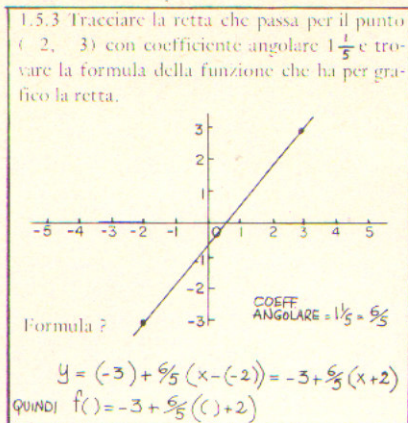
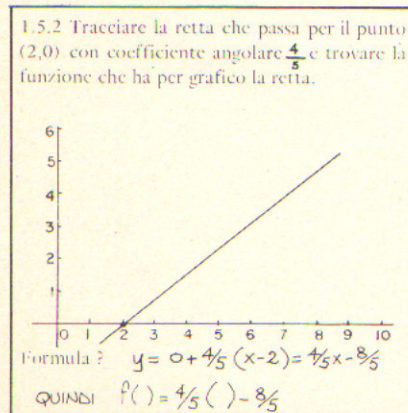
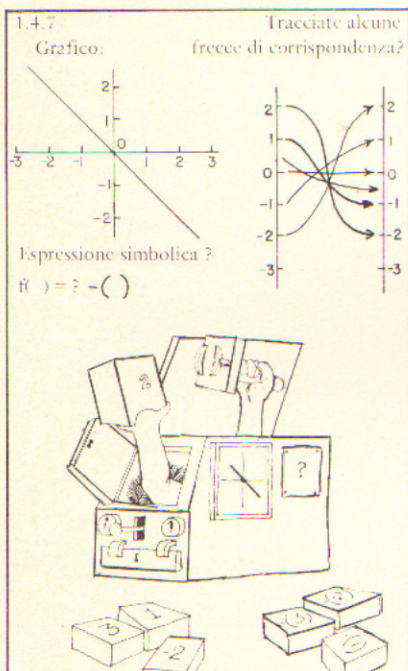
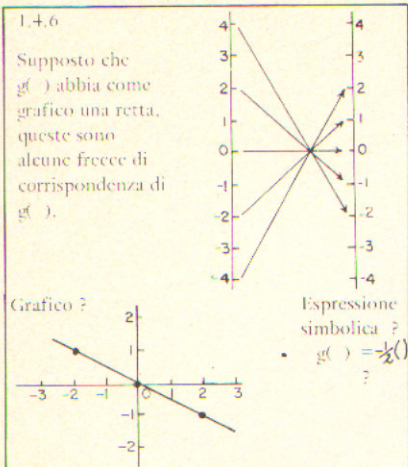
Tracciare alcune

frecce di corri-

spondenza?

Grafico?

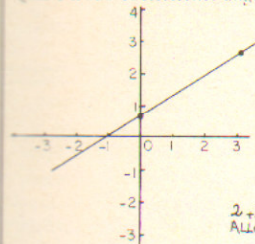




1.5.10 (Ancora più difficile!) Tracciare la retta contenente i punti (x,y) che soddisfano alla formula

$$2x = 3y - 2$$

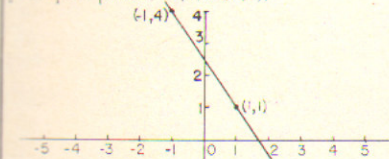
Qual è il suo coefficiente angolare?



ANCORA UNA VOLTA, IL TRUCCO STA NEL L' AVERE Y DA SOLO IN UNO DEI MEMBRI DELL' EQUAZIONE. SOMMANDO 2 AD AMB I MEMBRI:
 $2 + 2x = 3y - 2 + 2 = 3y$
 ALLORA $\frac{2}{3} + \frac{2}{3}x = y$
 IL RESTO E' FACILE.

Coefficiente angolare? $\frac{2}{3}$

1.5.11 Trovare una formula per la retta che passa per i punti (1,4) e (1,1).

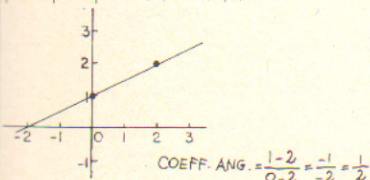


Siccome la retta punta verso sinistra, il coefficiente angolare della retta dovrebbe essere un numero negativo. Controlliamolo:

$$\text{coeff. ang.} = \frac{(1, 1) - (1, 4)}{(1, 1) - (1, 4)} = \frac{1 - 4}{1 - 1} = \frac{-3}{0} = -\frac{3}{0}$$

Formula? $y = 4 + (-\frac{3}{0})(x - 1) = 4 - \frac{3}{0}x = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x$
 OVVERO $y = 1 + (-\frac{3}{0})(x - 1) = 1 - \frac{3}{0}x + \frac{3}{0} = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x$
 IN ENTRAMBI I MODI, $y = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x$

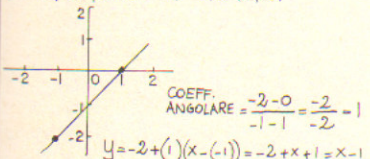
1.5.12 Trovare una formula per la retta che passa per i punti (0,1) e (2,2).



$$\text{COEFF. ANG.} = \frac{1 - 2}{0 - 2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{FORMULA: } y = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)(x - 0) = 1 + \frac{1}{2}x$$

1.5.13 Trovare una formula per la retta che passa per i punti (1, 2) e (1,0).

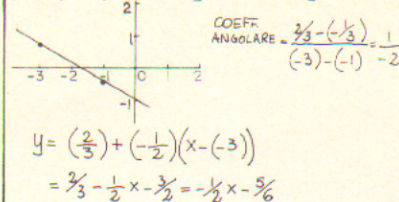


$$\text{COEFF. ANGOLARE} = \frac{-2 - 0}{-1 - 1} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$y = -2 + (1)(x - (-1)) = -2 + x + 1 = x - 1$$

OVVERO $y = 0 + (1)(x - 1) = x - 1$
 ANCORA UNA VOLTA, UTILIZZANDO (-1, -2) O (1, 0) COME "PUNTO ORIGINARIO" IL RISULTATO FINALE NON CAMBIA.

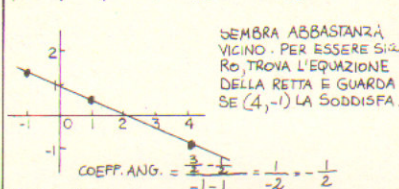
1.5.14 Trovare una formula per la retta che passa per i punti (1, 3/2) e (1, -1/3).



$$\text{COEFF. ANGOLARE} = \frac{\frac{3}{2} - (-\frac{1}{3})}{(-3) - (-1)} = \frac{1}{-2}$$

$$y = \left(\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)(x - (-3)) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$$

1.5.15 Il punto (4, -1) si trova sulla retta che passa per i punti (1, 3/2) e (1, 1/2)?



$$\text{COEFF. ANG.} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{-1 - 1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

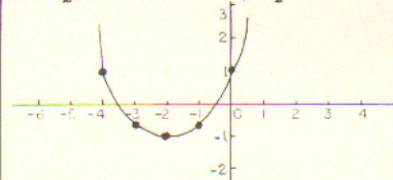
$$y = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)(x - 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}x$$

ORA GUARDA SE (4, -1) SODDISFA QUESTO:
 $-1 \stackrel{?}{=} 1 - \frac{1}{2} \cdot 4 = 1 - 2 = -1$; SÌ, FUNZIONA!

SEMBRA ABBASTANZA VICINO. PER ESSERE SICURO, TROVA L'EQUAZIONE DELLA RETTA E GUARDA SE (4, -1) LA SODDISFA.

1.6.1 Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{2}(x)^2 + 2(x) + 1 \quad (y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1)$$



In su o in giù? IN SU

Snella o panciuta? PANCIUTA

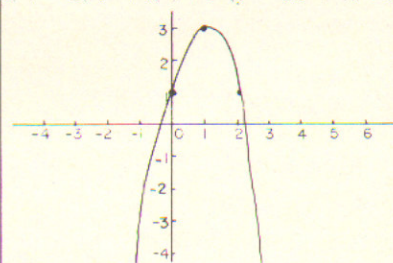
Posizione del vertice? VALORE DI X = $-\frac{2}{2 \cdot (\frac{1}{2})} = -2$

Alcuni punti? (-2, -1) = VERTICE;

$$(-1, -\frac{1}{2}); (-3, -\frac{1}{2}); (0, 1); (-4, 1)$$

1.6.2 Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = -2(x)^2 + 4(x) + 1 \quad (y = -2x^2 + 4x + 1)$$



In su o in giù? IN GIÙ

Snella o panciuta? SNELLA

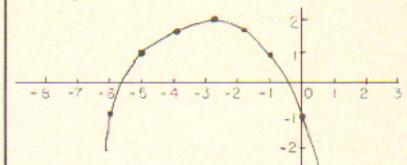
Posizione del vertice? VALORE DI X = $-\frac{-4}{2(-2)} = 1$

Alcuni punti? VERTICE: (1, 3)

$$(0, 1); (2, 1); (-1, -5); (3, -5)$$

1.6.3 Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = -\frac{1}{3}(x)^2 - 2(x) - 1 \quad (y = -\frac{1}{3}x^2 - 2x - 1)$$



In su o in giù? IN GIÙ

Snella o panciuta? PANCIUTA

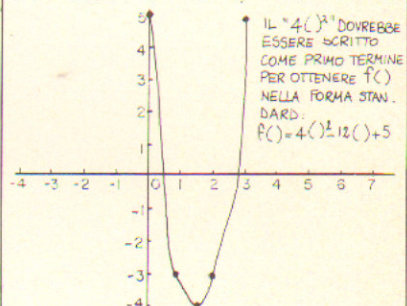
Posizione del vertice? VALORE DI X = $-\frac{-2}{2(-\frac{1}{3})} = -\frac{2}{-\frac{2}{3}} = 3$

Alcuni punti? VERTICE: (-3, 2)

$$(-2, \frac{5}{3}); (-4, \frac{5}{3}); (-1, \frac{2}{3}); (-5, \frac{2}{3}); (0, -1); (-6, -1)$$

1.6.4 Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = -12(x) + 4(x)^2 + 5 \quad (y = -12x + 4x^2 + 5)$$



IL "4(x)^2" DOVREBBE ESSERE SCRITTO COME PRIMO TERMINE PER OTTENERE f(x) NELLA FORMA STANDARD: $f(x) = 4(x)^2 - 12(x) + 5$

In su o in giù? IN SU

Snella o panciuta? SNELLA

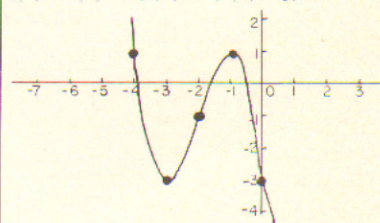
Posizione del vertice? VALORE DI X = $-\frac{-12}{2 \cdot 4} = \frac{3}{2}$

Alcuni punti? VERTICE: (3/2, -4)

$$(1, -3); (2, -3); (0, 5); (3, 5)$$

1.6.5 Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = (x)^3 - 6(x)^2 - 9(x) - 3$$



A = -1: E' SIMILE A W OVVERO

PUNTO DI FLESSO: VALORE DI X = $\frac{-(-6)}{3(-1)} = -2$

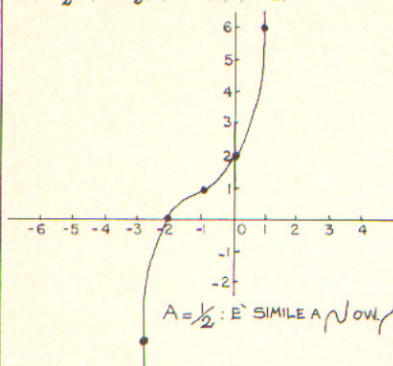
PUNTO: (-2, -1)

ALTRI PUNTI: (-3, -5); (-1, 1);

$$(-4, 1); (0, -3)$$

1.6.6 Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{2}(x)^3 + \frac{3}{2}(x)^2 + 2(x) + 2.$$



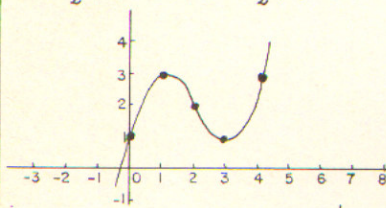
PUNTO DI FLESSO: VALORE DI $x = \frac{-3/2}{3(1/2)} = -1$

PUNTO: $(-1, 1)$

ALTRI PUNTI: $(0, 2); (-2, 0); (1, 6); (-3, -4)$

1.6.7 Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{2}(x)^3 - 3(x)^2 + \frac{9}{2}(x) + 1.$$



A = 1/2: E' SIMILE A OWERO

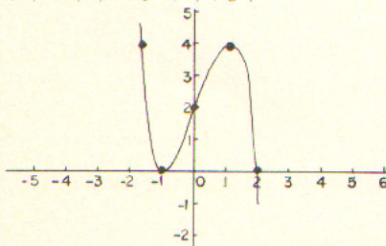
PUNTO DI FLESSO: VALORE DI $x = \frac{-(-3)}{3(1/2)} = 2$

PUNTO: $(2, 2)$

ALTRI PUNTI: $(1, 3); (3, 1); (0, 1); (4, 3)$

1.6.8 Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = -(x)^3 + 3(x)^2 + 2.$$



A = -1: E' SIMILE A OWERO

PUNTO DI FLESSO: "B" = 0 QUI!

COSI', VALORE DI $x = \frac{-(-3)}{3(-1)} = 0$

PUNTO: $(0, 2)$

ALTRI PUNTI: $(1, 4); (-1, 0); (2, 0); (-2, -4)$

II.2.1 Quando McSquared ha inserito $1/8$ nella



il risultato è stato $1/4$. Controllate la garanzia, cioè passate da SE ad ALLORA con l'algebra.

SE $2 - 1/4 < x < 2 + 1/4$. (MOLTIPLICARE PER $1/2$)

$$\frac{1}{2} \cdot (2 - \frac{1}{4}) < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2} \cdot (2 + \frac{1}{4})$$

$$1 - \frac{1}{8} < \frac{1}{2}x < 1 + \frac{1}{8}$$

(AGGIUNGERE 2) $3 - \frac{1}{8} < \frac{1}{2}x + 2 < 3 + \frac{1}{8}$

CORRISPONDE A

ALLORA $3 - 1/8 < 1/2 x + 2 < 3 + 1/8$

II.3.1 Se $f(x) = 2(x) - 1$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ dà come risultato $\delta(\epsilon)$ con la formula $\delta(\epsilon) = 1/2\epsilon$.

Controllare la nostra GARANZIA; cioè passare da

SE $2 - \delta(\epsilon) < x < 2 + \delta(\epsilon)$ ($\delta(\epsilon) = 1/2\epsilon$)

QUINDI $2 - \frac{1}{2}\epsilon < x < 2 + \frac{1}{2}\epsilon$

(MOLTIPLICANDO PER 2): $4 - \epsilon < 2x < 4 + \epsilon$

(AGGIUNGERE -1): $3 - \epsilon < 2x + 1 < 4 + \epsilon$

(QUINDI $f(2) = 4 - 1 = 3$)

ALLORA $f(2) - \epsilon < f(x) < f(2) + \epsilon$.

II.3.2 Se $f(x) = -3(x) + 5$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

dà come risultato $\delta(\epsilon) = 1/3\epsilon$. Controllare la GARANZIA. (Non dimenticare che moltiplicando le disequazioni per un numero negativo si invertono i segni di disuguaglianza!)

SE $1 - \frac{1}{3}\epsilon < x < 1 + \frac{1}{3}\epsilon$ ($\delta(\epsilon) = 1/3\epsilon$) QUINDI,

(PER -3) $-3 + \epsilon > -3x > -3 - \epsilon$

(PIÙ 5) $2 + \epsilon > -3x + 5 < 2 - \epsilon$

OVERO ALLORA $2 - \epsilon < -3x + 5 < 2 + \epsilon$

OVERO $f(1) - \epsilon < f(x) < f(1) + \epsilon$

II.2.2 Quando suggeriva $1/1000$ come numero di sfida per il margine di errore, R.D. disse che $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ avrebbe dato come risultato un $1/500$ garantito. Controllate se questo è effettivamente garantito.

SE $2 - \frac{1}{500} < x < 2 + \frac{1}{500}$

(MOLTIPLICANDO PER $1/2$) $1 - \frac{1}{1000} < \frac{1}{2}x < 1 + \frac{1}{1000}$

ALLORA (AGGIUNGERE 2): $3 - \frac{1}{1000} < \frac{1}{2}x + 2 < 3 + \frac{1}{1000}$

OVERO,

ALLORA $g(2) - \frac{1}{1000} < g(x) < g(2) + \frac{1}{1000}$

II.3.3 Usando la stessa funzione di

II.3.2, supponiamo che $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ dia invece come risultato $\delta(\epsilon) = 1/6\epsilon$. Fate vedere che anche questo può essere garantito.

(Indicazione: fare uso del fatto che $1/2\epsilon < \epsilon$ essendo $\epsilon > 0$).

SE $1 - 1/6\epsilon < x < 1 + 1/6\epsilon$ (PER -3)

$-3 + \frac{1}{2}\epsilon > -3x > -3 - \frac{1}{2}\epsilon$ (PIÙ 5)

$2 + \frac{1}{2}\epsilon > -3x + 5 < 2 - \frac{1}{2}\epsilon$

OVERO $2 - \frac{1}{2}\epsilon < -3x + 5 < 2 + \frac{1}{2}\epsilon$

(MA $1/2\epsilon < \epsilon$ QUINDI, $(-1)1/2\epsilon > (-1)\epsilon$

OVERO $-1/2\epsilon > -\epsilon$ ANCHE)

ALLORA $2 - \epsilon < 2 - \frac{1}{2}\epsilon < -3x + 5 < 2 + \frac{1}{2}\epsilon < 2 + \epsilon$

ALLORA $2 - \epsilon < -3(x) + 5 < 2 + \epsilon$

II.4.1 Dimostrare che $f(x) = \frac{1}{2}(x) + 3$ è continua nel punto $x = 4$.

DIMOSTRARE CHE $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ ESISTE ED È UGUALE A $f(4) = 5$

1. SIA $\delta(\epsilon) = 2\epsilon$

2. SE $4 - 2\epsilon < x < 4 + 2\epsilon$

(PER $1/2$): $2 - \epsilon < \frac{1}{2}x < 2 + \epsilon$

(PIÙ 3): ALLORA $5 - \epsilon < \frac{1}{2}x + 3 < 5 + \epsilon$

OVERO ALLORA $f(4) - \epsilon < f(x) < f(4) + \epsilon$

$$f(4) = \frac{1}{2}(4) + 3 = 5$$

SE $4 - \delta(\epsilon) < x < 4 + \delta(\epsilon)$

COME SAREBBE BELLO SE $\delta(\epsilon) = 2\epsilon$

(PER 2): $4 - 2\epsilon < x < 4 + 2\epsilon$

(PIÙ "3") $2 - \epsilon < \frac{1}{2}x < 2 + \epsilon$

$5 - \epsilon < \frac{1}{2}x + 3 < 5 + \epsilon$

ALLORA $f(4) - \epsilon < f(x) < f(4) + \epsilon$

II.4.2 Dimostrare che $f(x) = -\frac{1}{4}(x) + 5$ è continua nel punto $x = -3$.

DIMOSTRARE CHE $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ ESISTE ED È UGUALE A $f(-3) = 5 + \frac{1}{4}$

1. SIA $\delta(\epsilon) = 9\epsilon$

2. SE $-3 - 9\epsilon < x < -3 + 9\epsilon$

(PER $-1/4$): $\frac{1}{3} + \epsilon > -\frac{1}{4}x > \frac{1}{3} - \epsilon$

(PIÙ 5): $(5 + \frac{1}{3}) + \epsilon > -\frac{1}{4}x + 5 > (5 + \frac{1}{3}) - \epsilon$

(RIALTA TUTTO): $(5 + \frac{1}{3}) - \epsilon < -\frac{1}{4}x + 5 < (5 + \frac{1}{3}) + \epsilon$

ALLORA $f(-3) - \epsilon < f(x) < f(-3) + \epsilon$

$$f(-3) = -\frac{1}{4}(-3) + 5 = \frac{1}{3} + 5$$

SE $-3 - \delta(\epsilon) < x < -3 + \delta(\epsilon)$

COME SAREBBE BELLO SE $\delta(\epsilon) = 9\epsilon$!

$-3 + 9\epsilon > x > -3 - 9\epsilon$

(PER (-1/4)): $\frac{1}{3} + 9\epsilon > (-1/4)x > \frac{1}{3} - 9\epsilon$

(PIÙ 5): $\frac{1}{3} + \epsilon < -\frac{1}{4}x < \frac{1}{3} + \epsilon$

$(5 + \frac{1}{3}) - \epsilon < -\frac{1}{4}x + 5 < (5 + \frac{1}{3}) + \epsilon$

ALLORA $f(-3) - \epsilon < f(x) < f(-3) + \epsilon$

II.4.3 Dimostrare che $f(x) = 27 - \frac{1}{10}x$ è continua nel punto $x = 5$.

DIMOSTRARE CHE $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ ESISTE ED È EGUALE A $f(5) = 27 - \frac{1}{2}$

1. SIA $\delta(\epsilon) = 10\epsilon$

2. SE $5 - 10\epsilon < x < 5 + 10\epsilon$

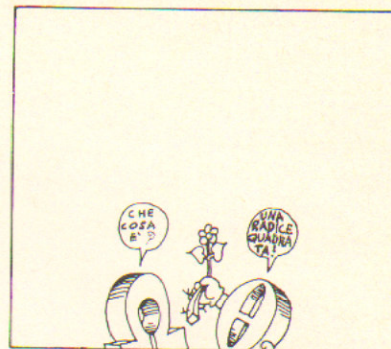
(PER $-\frac{1}{10}$): $-\frac{1}{2} + \epsilon > -\frac{1}{10}x > -\frac{1}{2} - \epsilon$

(PIÙ 27): $(27 - \frac{1}{2}) + \epsilon > 27 - \frac{1}{10}x > (27 - \frac{1}{2}) - \epsilon$

OVVERO, $(27 - \frac{1}{2}) - \epsilon < 27 - \frac{1}{10}x < (27 - \frac{1}{2}) + \epsilon$

ALLORA $f(5) - \epsilon < f(x) < f(5) + \epsilon$

$f(5) = 27 - \frac{1}{10}(5) = 27 - \frac{1}{2}$
 SE $5 - \delta(\epsilon) < x < 5 + \delta(\epsilon)$
 COME SAREBBE BELLO SE $\delta(\epsilon) = 10\epsilon$!
 ↑
 $5 - 10\epsilon < x < 5 + 10\epsilon$
 (PER -10): $5 + 10\epsilon > x > 5 - 10\epsilon$
 (PIÙ -27): $-\frac{1}{2} - \epsilon < -\frac{1}{10}x < -\frac{1}{2} + \epsilon$
 (27 - $\frac{1}{2}$): $-\epsilon < 27 - \frac{1}{10}x < \epsilon + 27 - \frac{1}{2}$
 ALLORA $f(5) - \epsilon < f(x) < f(5) + \epsilon$



II.4.4. Dimostrare che $f(x) = 2(x) + 7$ è continua nel punto $x = a$ per UN QUALSIASI numero reale a . QUESTO FUNZIONERÀ PROPRIO COME GLI ALTRI!

DIMOSTRARE CHE $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ESISTE ED È EGUALE A $f(a) = 2a + 7$

1. SIA $\delta(\epsilon) = \frac{1}{2}\epsilon$

2. SE $a - \frac{1}{2}\epsilon < x < a + \frac{1}{2}\epsilon$

(PER 2): $2a - \epsilon < 2x < 2a + \epsilon$

(PIÙ 7): $2a + 7 - \epsilon < 2x + 7 < 2a + 7 + \epsilon$

OVVERO, ALLORA $f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon$

L'ALGEBRA DICE CHE QUESTO SARÀ VALIDO PER UN QUALSIASI "a".

SE $a - \delta(\epsilon) < x < a + \delta(\epsilon)$
 COME SAREBBE BELLO SE $\delta(\epsilon) = \frac{1}{2}\epsilon$!
 ↑
 $a - \frac{1}{2}\epsilon < x < a + \frac{1}{2}\epsilon$
 (PER $\frac{1}{2}$): $a - \frac{1}{2}\epsilon < x < a + \frac{1}{2}\epsilon$
 (PIÙ -7): $2a - \epsilon < 2x < 2a + \epsilon$
 $2a + 7 - \epsilon < 2x + 7 < 2a + 7 + \epsilon$
 ALLORA $f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon$

II.4.5 Dimostrare che $f(x) = 16 - \frac{1}{2}x$ è continua nel punto $x = a$ per ogni numero reale a .

DIMOSTRARE CHE $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ESISTE ED È EGUALE A $f(a) = 16 - \frac{1}{2}a$

1. SIA $\delta(\epsilon) = 2\epsilon$

2. SE $a - 2\epsilon < x < a + 2\epsilon$

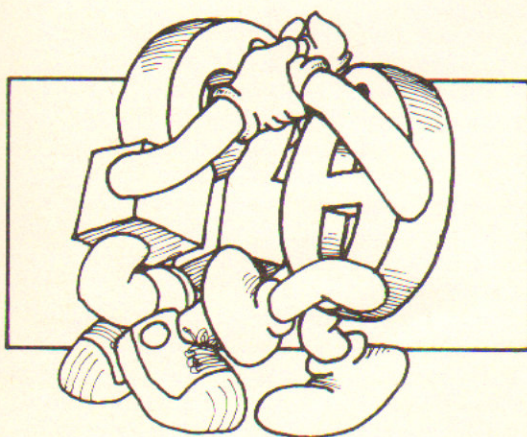
(PER $-\frac{1}{2}$): $-\frac{1}{2}a + \epsilon > -\frac{1}{2}x > -\frac{1}{2}a - \epsilon$

(PIÙ 16): $16 - \frac{1}{2}a + \epsilon > 16 - \frac{1}{2}x > 16 - \frac{1}{2}a - \epsilon$

(RIBALTA TUTTO): $(16 - \frac{1}{2}a) - \epsilon < 16 - \frac{1}{2}x < (16 - \frac{1}{2}a) + \epsilon$

ALLORA $f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon$

SE $a - \delta(\epsilon) < x < a + \delta(\epsilon)$
 COME SAREBBE BELLO SE $\delta(\epsilon) = 2\epsilon$!
 (RIBALTA TUTTO) $a - 2\epsilon < x < a + 2\epsilon$
 (PER -2): $a + 2\epsilon > x > a - 2\epsilon$
 (PIÙ -16): $-\frac{1}{2}a - \epsilon < -\frac{1}{2}x < -\frac{1}{2}a + \epsilon$
 $16 - \frac{1}{2}a - \epsilon < 16 - \frac{1}{2}x < 16 - \frac{1}{2}a + \epsilon$
 ALLORA $f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon$



**Quale scienza
per quale potere ?**

**Quale potere
per quale società ?**

**re
de
po
sti**

Con questi interrogativi la più antica rivista di divulgazione scientifica italiana, SAPERE, apriva nel gennaio 1974 il suo 768° numero, il primo della nuova serie diretta da Giulio A. Maccacaro.

E spiegava:

« Perché di scienza è ormai fatto il potere e di potere gli uomini vivono e muoiono. Così che 'fare scienza' vuol dire, oggi e in ogni caso, lavorare 'per' o 'contro' l'uomo ed ogni uomo è raggiunto dalla scienza per esserne fatto più libero o più oppresso. L'organizzazione scientifica del lavoro ed il lavoro dell'organizzazione scientifica ripetono e diffondono, dalla fabbrica e dal laboratorio, un unico comando che si allarga e raggiunge ogni spazio e ogni tempo della vita.

Distinguere, allora, tra 'addetti' e 'non addetti' ai lavori della scienza — per riservare ai primi la proprietà del discorso da rivolgere ai secondi in modi benevolmente divulgati — corrisponde a una scelta di conservazione.

La rifiutiamo per un'altra che riconosce soltanto 'operatori' e 'operati' della scienza, così come del potere e, dunque, della scienza che è potere.

Vorremmo queste pagine particolarmente attente e aperte alle domande e alle proposte, all'esperienza e al sapere degli 'altri': coloro che l'egemonia borghese ha sempre escluso dal privilegio della conoscenza scientifica. Perché la loro candidatura politica è anche una candidatura scientifica: quali soggetti di una scienza che non sia più la stessa in un comando diverso, ma sia diversa per una nuova liberazione ».

Da allora la rivista SAPERE ha pubblicato articoli e monografie su temi di scottante attualità sociale, come la crisi energetica, il cancro da lavoro, il problema demografico, l'informatica come controllo della società, il ruolo delle industrie chimica e siderurgica, gli alimenti industrializzati, il problema dell'acqua potabile, il controllo dei comportamenti, la carestia programmata, la medicina del lavoro, la droga, l'organizzazione scientifica del lavoro, la generazione involontaria, ricerca e società.

Ha ospitato dibattiti sull'Università, la maternità, i terremoti, la fisica nucleare, la riforma sanitaria, la ricerca scientifica, la didattica, la nocività del lavoro, la genetica, l'etologia.

Alla impostazione e alla elaborazione della rivista contribuisce il gruppo aperto di cui fanno parte:

Giovanni Abrami, Mario Agostinelli, Franco Basaglia, Maria Beltrami, Giorgio Bert, Virginio Bettini, Giorgio Bignami, Sergio Bologna, Gianpiero Borella, Floriano Calvino, Luigi Cancrini, Franco Carnevale, Carlo Casti, Francesco Ceratti, Giovanni Cesareo, Francesco Cifaloni, Marcello Cini, Cesare Cislighi, Franco D'Andrea, Giuseppe De Luca, Angelo Dina, Aldo Fabiani, Vittorio Fagone, Enrico Falqui, Guido Fiegna, Marina Frontali, Sancia Gaetani, Edoardo Gaffurri, Massimo Gaglio, Gianfranco Ghiara, Valerio Giardini, Giovanni Jervis, Felice Laudadio, Giuseppe Lojacono, Vittorio Lombardi, Ugo Lucca, Giulio A. Maccacaro, Thomas Maldonado, Paola M. Manacorda, Luigi Mara, Marco Margnelli, Alberto Martinelli, Bruno Mazza, Leo Nahon, Raffaele Nusiti, Stefano Mistura, Franca Ongaro, Dario Paccino, Erminio Raiteri, Dario Romano, Renato Rozzi, Vladimiro Scatturin, Ezio Tabacco, Benedetto Terracini, Hrayr Terzian, Ettore Tibaldi, Renzo Tomatis, Emanuele Vinassa de Regny, Michele Zappella, G.B. Zorzoli.

II VOLUME ...

ARGOMENTI

Altri calcoli segreti sulle parabole.
Una funzione che non è continua.
Continuità in un intervallo.
Cosa succede quando in un grafico manca un punto.
Unicità di un punto limite: dimostrazione di un teorema autentico.
Capitolo III. Derivate.
Il problema del coefficiente angolare di una tangente.
Costruzione della funzione della tangente.
Leggi relative al «rito dei tre passi» per le derivate.
Definizione delle derivate.
Derivate generali delle polinomiali.
Velocità.

PER ORDINARE
IL TUO SECONDO
VOLUME, GUARDA
QUI SOTTO...



Ritagliare e spedire a: BCD — Via Matteo Bandello, 16 — 20123 Milano — Telefono 4982986

- ☐ Per favore speditemi in contrassegno (L. 4.000 + L. 300 di contributo spese postali)
n. copie del Secondo Volume del Manuale di Calcolo Differenziale del Prof.
Mc. Squared non appena sarà disponibile
- ☐ Sono interessato a ricevere il catalogo completo delle vostre pubblicazioni.

COGNOME NOME

INDIRIZZO

CITTA' CAP.

